И. И. ПРИВАЛОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

И. И. ПРИВАЛОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ ДВАДЦАТЬ ПЯТОЕ
СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для высших технических учебных заведений

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ТРИНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании моей книги «Аналитическая геометрия» подвергнут переработке материал предыдущего издания. Выполняя эту методическую работу, я стремился устранить трудности в понимании учащимися некоторых вопросов курса, замеченные в процессе преподавания рядом преподавателей втузов. Приношу глубокую благодарность всем приславшим свои замечания. Особо ценные указания я получил от доцента В. П. Минорского, которому выражаю сердечную благодарность.

И. Привалов

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

При редактировании 18-го издания этой книги были учтены замечания, сделанные при обсуждении 17-го издания на заседании втузовской секции Московского математического общества. В результате переработки книги для 17-го и 18-го изданий внесены следующие изменения (по сравнению с 16-м):

1) В главе I части первой для большей простоты и цельности изложения устранены операции над направленными отрезками. Последовательно на протяжении всей книги проведено различие между понятиями «направленного отрезка» и его «величины».

2) В первой части изложению учения о линиях предпослана глава «Линии и их уравнения». Аналогично во второй части главам о поверхностях и линиях предпослана глава «Геометрическое значение уравнений».

3) В главе III части первой на первое место поставлено уравнение прямой с угловым коэффициентом.

4) В главе VII части первой в §§ 4—9 дано сокращённое изложение общей теории кривых второго порядка. Более же полное её изложение перенесено в §§ 10—19 и дано петитом.

5) В главах «Плоскость» и «Прямая линия» части второй всюду на первое место выдвинуто векторное изложение.

6) Уточнены некоторые формулировки и выводы.

Эта работа была проведена Н. А. Олисовым совместно с его сотрудниками по кафедре высшей математики МЭМИИТ Н. Я. Сысоевой и Е. Е. Бреневым и проходила под наблюдением начальника этой кафедры профессора П. К. Рашевского.

В 24-м издании исправлены лишь замеченные опечатки.

ВВЕДЕНИЕ

Предмет аналитической геометрии заключается в исследовании геометрических форм с помощью алгебраического анализа. В различных отделах элементарной математики алгебра прилагается к решению многих геометрических вопросов. Так, например, в геометрии с помощью чисел приходится определять длины отрезков и дуг, площади фигур, объёмы тел; в тригонометрии пользуются числовыми соотношениями для установления зависимостей между углами и отношениями отрезков. Но, в то время как в этих отделах математики с помощью анализа решается вопрос о размерах геометрических форм, в аналитической геометрии с помощью чисел характеризуется самая существенная их особенность — их положение.

Числа, определяющие положение геометрической формы, называются её координатами. Способ же, с помощью которого определяется положение геометрической формы, носит название способа или метода координат. Геометрические формы весьма разнообразны, и при построении аналитической геометрии, естественно, мы должны принять одну какую-нибудь из форм за первичную, с помощью которой мы будем образовывать все остальные. Проще всего за такую начальную форму принять геометрическую точку. Тогда всякую другую геометрическую форму, например линию или поверхность, можно рассматривать как геометрическое место точек.

Приняв за начальный элемент точку, мы должны прежде всего показать, каким образом определяется положение точки в пространстве с помощью чисел. Эта первая идея метода координат была положена в основу решения различных геометрических задач. Вторая идея этого метода заключается в установлении того, каким образом геометрические свойства линии отражаются на координатах точек, принадлежащих этой линии. Плодотворные идеи метода координат нашли себе применение во всех отраслях математики и механики; благодаря развитию дифференциального и интегрального исчисления они сделались весьма мощным орудием математического исследования.

Приступая к изложению аналитической геометрии, мы, ради удобства, делим весь курс на две части. В первой части будем заниматься исследованием плоских геометрических форм средствами

алгебры, основанными на применении координат. Во второй части мы будем аналогично поступать с пространственными геометрическими формами.

Служебную роль в курсе имеет глава, посвящённая изложению теории определителей 2-го и 3-го порядка. Эта глава, равно как и дальнейшие её приложения, может быть опущена.

В целях большей геометрической наглядности исходные уравнения плоскости и прямой в пространстве даны в векторной форме. Соответственно с этим включена глава, в которой изложены необходимые сведения из векторной алгебры. Однако, учитывая потребности тех втузов, в которых при изучении аналитической геометрии не проходят векторной алгебры, мы даём параллельно векторному изложению теории плоскости и прямой также и координатное.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА I

МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. Направленные отрезки. Понятия отрезка и его длины известны из элементарной геометрии. Отрезок есть часть прямой, ограниченная двумя точками. Длина отрезка есть положительное число, получаемое измерением этого отрезка с помощью некоторого заранее выбранного отрезка — единицы масштаба. Отрезок, ограниченный точками A и B, а также его длину, обозначают AB или BA.

Во многих вопросах математики и физики имеет значение *направление* отрезка: например, если отрезок рассматривается как путь, который проходит движущаяся точка.

Чтобы охарактеризовать направление отрезка, одну из двух ограничивающих его точек принимают за начало отрезка, а другую — за его конец; направлением отрезка считают направление от начала к концу. Отрезок, на котором указано направление (т. е. сказано, какая из двух граничных точек считается началом и какая — концом), называется *направленным отрезком.*

Условимся обозначать направленный отрезок двумя буквами с чертой над ними, помещая на первом месте букву, указывающую начало отрезка. Так, например, направленный отрезок, для которого точка A является начальной, а B — конечной, будем обозначать $\overline{AB}$. Заметим, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ различны, так как направления их противоположны.

Если рассматривать направленные отрезки, расположенные на одной прямой, то их направления можно характеризовать знаками $+$ и $-$. Для этого одно из двух противоположных направлений этой прямой (безразлично какое) назовём положительным, а другое — отрицательным. На чертеже положительное направление условимся отмечать стрелкой (на черт. 1 направление слева направо принято за положительное). Прямая, на которой выбрано положительное направление, называется *осью.*

Длина направленного отрезка, расположенного на оси, взятая с определённым знаком, называется *величиной направленного отрезка оси*; при этом знак выбирается положительный, если направление

отрезка совпадает с положительным направлением оси, и отрицательный, — если направление отрезка противоположно положительному направлению оси[1]). Так, например, величина направленного отрезка $\overline{AC}$, изображенного на черт. 1, положительна, а величина отрезка $\overline{CB}$ — отрицательна. Очевидно, длина направленного отрезка равна модулю[2]) его величины. Условимся длину направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначать через AB, а его величину — вел $\overline{AB}$.

A B C

Черт. 1.

Из определения величины направленного отрезка оси следует, что величины отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ отличаются знаком:

$$\text{вел } \overline{AB} = -\text{вел } \overline{BA}.$$

Замечание. В дальнейшем нам придётся ввести в рассмотрение и такой направленный «отрезок», начало и конец которого совпадают. Направление этого отрезка можно выбирать произвольно. Длина, а следовательно, и величина его равна нулю. Такие отрезки мы будем называть *нулевыми*.

Возьмём на некоторой оси три точки A, B, C и выясним, чему будет равна сумма величин направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. Мы сейчас покажем, что *при любом расположении точек A, B и C на оси сумма величин направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ будет равна величине направленного отрезка $\overline{AC}$*:

$$\text{вел } \overline{AB} + \text{вел } \overline{BC} = \text{вел } \overline{AC}, \tag{1}$$

т. е. сумма величин направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, расположенных на оси так, что конец первого из них является началом второго, равна величине направленного отрезка $\overline{AC}$, началом которого является начало первого, а концом — конец второго направленного отрезка.

A B C

Черт. 2.

Для доказательства равенства (1) предположим сначала, что точка B располагается между точками A и C (черт. 2).

Рассматривая направленный отрезок как путь, проходимый движущейся точкой, мы можем сказать, что в этом случае подвижная точка, пройдя путь $\overline{AB}$, продолжает движение по пути $\overline{BC}$ в том же направлении. Тогда длина отрезка $\overline{AC}$, очевидно, равна сумме

[1]) Термин «величина направленного отрезка оси» имеет смысл употреблять только в том случае, когда рассматривается направленный отрезок, лежащий на оси. Но в дальнейшем для краткости мы будем говорить о величине направленного отрезка, опуская слово «оси». Точно так же для краткости мы будем иногда говорить «отрезок $\overline{AB}$» вместо «направленный отрезок $\overline{AB}$».

[2]) Абсолютная величина числа называется также его модулем; модуль числа a будем обозначать через $|a|$.

длин отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, а величины всех трёх направленных отрезков имеют одинаковые знаки, так как все три отрезка одинаково направлены. Следовательно,

$$\text{вел } \overline{AB} + \text{вел } \overline{BC} = \text{вел } \overline{AC}.$$

Таким образом, если точка B лежит на отрезке $\overline{AC}$, то равенство (1) справедливо.

Допустим теперь, что точка B располагается вне отрезка $\overline{AC}$, либо на продолжении отрезка за точку C (черт. 3), либо на продолжении его за точку A (черт. 4).

Черт. 3. Черт. 4.

В каждом из этих случаев подвижная точка, пройдя путь $\overline{AB}$, продолжает движение по пути $\overline{BC}$ в противоположном направлении. Ясно, что теперь длина отрезка $\overline{AC}$ будет равна разности длин двух других отрезков ($AC = AB - BC$ — черт. 3, либо $AC = BC - AB$ — черт. 4).

Очевидно, что направление отрезка $\overline{AC}$ будет совпадать с направлением того из отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, который имеет бо́льшую длину (с направлением отрезка $\overline{AB}$ на черт. 3 или с направлением отрезка $\overline{BC}$ на черт. 4). Поэтому величина отрезка $\overline{AC}$ будет иметь тот же знак, что и величина более длинного отрезка.

Следовательно, величина направленного отрезка $\overline{AC}$ может быть найдена по правилу сложения относительных чисел вел $\overline{AB}$ и вел $\overline{BC}$.

Таким образом, и при любом расположении точки B вне отрезка $\overline{AC}$ будем иметь:

$$\text{вел } \overline{AB} + \text{вел } \overline{BC} = \text{вел } \overline{AC}.$$

Остаётся заметить, что равенство (1) будет справедливо и в том случае, когда некоторые точки будут совпадать. Читатель легко проверит это сам. Например, если будут совпадать точки A и C, то

$$\text{вел } \overline{AB} + \text{вел } \overline{BC} = \text{вел } \overline{AB} + \text{вел } \overline{BA} = 0,$$

но и вел $\overline{AC} = 0$. Следовательно, равенство (1) будет справедливо.

Замечание. Если бы в равенстве (1) стояли не величины, а *длины* направленных отрезков, то оно было бы справедливо *только* в том случае, когда точка B лежит на отрезке $\overline{AC}$, и теряло бы силу при любом другом расположении точки B.

Пользуясь равенством (1), легко показать, что при любом числе точек A, B_1, B_2, ..., B_n, C и произвольном их расположении на оси мы будем иметь:

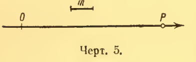
$$\text{вел } \overline{AB_1} + \text{вел } \overline{B_1B_2} + \ldots + \text{вел } \overline{B_nC} = \text{вел } \overline{AC}, \qquad (1')$$

т. е. сумма величин направленных отрезков, для которых начало каждого следующего отрезка совпадает с концом предыдущего, равна величине направленного отрезка, начало которого совпадает с началом первого, а конец — с концом последнего из направленных отрезков.

§ 2. Координаты на прямой линии. Посмотрим, как можно определить положение точки на прямой линии.

Возьмём на этой прямой некоторую произвольную точку O (от латинского origo — начало), относительно которой будем определять положения всех точек прямой. Ясно, что положение любой точки P прямой линии будет вполне определяться направленным отрезком $\overline{OP}$: каждой точке прямой соответствует определённый направленный отрезок с началом в точке O и концом в рассматриваемой точке P и, обратно, каждому направленному отрезку с началом в точке O соответствует одна точка P прямой линии — конец этого отрезка.

Установим теперь на прямой положительное направление и выберем единицу масштаба m (на черт. 5 положительное направление выбрано слева направо). Тогда положение любой точки P прямой линии можно будет определить *числом* — величиной направленного отрезка $\overline{OP}$. Это число, определяющее положение точки, называется её *координатой*. Итак, *величина направленного отрезка $\overline{OP}$ является координатой точки P прямой линии.* Обозначая координату точки P буквой x, имеем:



Черт. 5.

$$x = \text{вел } \overline{OP}.$$

Зная точку P, легко найти её координату: она равна величине направленного отрезка $\overline{OP}$. Обратно, по заданной координате x можно построить единственную точку: она будет концом направленного отрезка $\overline{OP}$, величина которого равна x.

Если на прямой линии отмечена некоторая точка O, указано положительное направление и, кроме того, выбрана единица масштаба, то мы будем говорить, что на прямой установлена *система координат.* Точка O, являющаяся началом рассматриваемых направленных отрезков, называется *началом координат*, а данная прямая — *осью координат.* Начало координат делит ось координат на две части; полупрямая, идущая от точки O в положительном направлении, называется *положительной полуосью*, полупрямая, идущая от O в отри-

цательном направлении, — *отрицательной полуосью*. Очевидно, точки положительной полуоси имеют положительные координаты (на черт. 5 точки, лежащие вправо от O), точки отрицательной полуоси — отрицательные координаты; точка O имеет координату, равную нулю.

В тексте условимся координату точки писать в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку: $P(x)$.

§ 3. Расстояние между двумя точками на прямой линии. Пусть нам даны в некоторой системе координат две точки: $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Посмотрим, как выразится расстояние AB между этими точками через их координаты.

На основании равенства (1) мы можем написать, что

$$\text{вел}\ \overline{OA} + \text{вел}\ \overline{AB} = \text{вел}\ \overline{OB},$$

откуда

$$\text{вел}\ \overline{AB} = \text{вел}\ \overline{OB} - \text{вел}\ \overline{OA};$$

так как вел $\overline{OA} = x_1$, вел $\overline{OB} = x_2$, то

$$\text{вел}\ \overline{AB} = x_2 - x_1. \tag{2}$$

Таким образом, *чтобы получить величину направленного отрезка оси, нужно из координаты его конца вычесть координату его начала.*

Расстояние между точками A и B равно длине направленного отрезка $\overline{AB}$. Следовательно,

$$AB = |x_2 - x_1|, \tag{2'}$$

т. е. *расстояние между двумя точками равно абсолютной величине разности координат этих точек.*

Например, если даны точки $A(5)$ и $B(-3)$, то вел $\overline{AB} = -3 - 5 = -8$, а расстояние $AB = 8$.

§ 4. Прямоугольные координаты на плоскости. Дадим теперь понятие о методе координат на плоскости, т. е. укажем способ, позволяющий определять положение точек плоскости с помощью чисел.

Возьмём две взаимно перпендикулярные прямые и на каждой из них установим положительное направление. Эти прямые, относительно которых мы будем определять положение точек плоскости, называются *осями координат*. Оси координат обычно располагают так, как это указано на черт. 6: одну — горизонтально и положительное направление на ней выбирают слева направо, а другую — вертикально и положительное направление на ней — снизу вверх. Одна из осей (обычно горизонтальная) называется *осью абсцисс* (ось Ox), а другая —

Черт. 6.

осью ординат (ось Oy). Точка пересечения осей координат называется *началом координат* (на черт. 6 начало координат обозначено буквой O). Наконец, выберем единицу масштаба (мы всегда будем предполагать, что на обеих осях координат выбрана одна и та же единица масштаба).

Теперь положение любой точки плоскости можно будет определить числами — координатами этой точки. Действительно, всякой точке M плоскости соответствуют на осях координат две точки P и Q, являющиеся её проекциями[1]) на эти оси (черт. 6) и, обратно, зная точки P и Q на осях координат, можно построить единственную точку M на плоскости, для которой P и Q являются проекциями на эти оси. Таким образом, определение положения точки M плоскости сводится к определению положений её проекций P и Q на координатные оси.

Но мы уже знаем, что положение точки на оси вполне определяется её координатой. Пусть x — координата точки P на оси абсцисс ($x =$ вел $\overline{OP}$) и y — координата точки Q на оси ординат ($y =$ вел $\overline{OQ}$). Числа x и y вполне определяют положение точки M на плоскости и называются координатами точки; при этом x называется абсциссой точки M, а y — её ординатой.

Таким образом, *абсциссой точки называется величина направленного отрезка оси Ox, началом которого является начало координат, а концом — проекция точки на эту ось; ординатой точки называется величина направленного отрезка оси Oy, началом которого является начало координат, а концом — проекция точки на ось ординат.*

Итак, положение любой точки плоскости вполне определяется заданием пары чисел x и y, первое из которых является абсциссой точки, а второе — её ординатой.

Координаты точки условимся писать в скобках, рядом с буквой, обозначающей эту точку, ставя на первом месте абсциссу, а на втором — ординату и разделяя их запятой: $M(x, y)$. При указанном на черт. 6 расположении координатных осей для всех точек плоскости, лежащих вправо от оси Oy (оси ординат), абсцисса x положительна, а для точек, лежащих влево от оси Oy, — отрицательна. Точки самой оси Oy имеют абсциссу, равную нулю. Совершенно так же точки плоскости, лежащие выше оси Ox (оси абсцисс), имеют положительную ординату y, а точки, лежащие ниже оси Ox, — отрицательную. Точки самой оси Ox имеют ординату, равную нулю. Начало координат имеет координаты (0, 0).

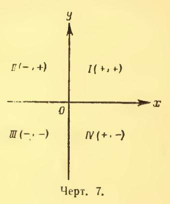
Оси координат делят плоскость на четыре части, называемые *четвертями* или *квадрантами* (иногда их также называют коорди-

---

[1]) Проекцией точки M на ось называется основание перпендикуляра, опущенного из M на эту ось.

натными углами). Часть плоскости, заключённая между положительными полуосями Ox и Oy, называется первым квадрантом. Дальше нумерация квадрантов идёт против часовой стрелки (черт. 7). Для всех точек I квадранта $x>0, y>0$; для точек II квадранта $x<0$, $y>0$; в III квадранте $x<0, y<0$ и в IV квадранте $x>0, y<0$.

Координаты, которые принимаются здесь для определения положения точки плоскости, называются *прямоугольными координатами*, так как точка M плоскости получается пересечением двух прямых PM и QM (черт. 6), встречающихся под прямым углом, а также *декартовыми* по имени математика и философа Декарта, который в 1637 году опубликовал первый труд по аналитической геометрии.



Черт. 7.

Декартова прямоугольная система координат не является единственной координатной системой, позволяющей определять положения точек плоскости (см. § 11 этой главы), но она является наиболее простой и мы в дальнейшем будем пользоваться преимущественно ею.

Из описанного метода координат вытекает решение двух основных задач.

Задача I. *По данной точке M найти её координаты.*

Из данной точки M опускаем перпендикуляры на оси Ox и Oy. Основания этих перпендикуляров — точки P и Q — определят обе искомые координаты. Первая координата точки M, её абсцисса, равна величине направленного отрезка $\overline{OP}$ оси Ox. Вторая же координата точки M, её ордината, равна величине направленного отрезка $\overline{OQ}$ оси Oy.

Задача II. *Зная координаты x и y точки M, построить эту точку.*

Отложим по оси Ox от точки O отрезок длиною $|x|$ единиц вправо, если $x>0$, и влево, если $x<0$. Конец этого отрезка — точка P — будет проекцией искомой точки M на ось Ox; откладывая по оси Oy от точки O отрезок длиною $|y|$ единиц вверх, если $y>0$, и вниз, если $y<0$, получим точку Q — проекцию искомой точки на ось Oy. Зная же P и Q, легко по этим точкам, как проекциям, построить искомую точку M. Для этого нужно провести через P и Q прямые, параллельные осям координат: в пересечении этих прямых получится искомая точка M.

Замечание. Если мы условимся рассматривать направленные отрезки $\overline{PM}$ и $\overline{QM}$ (черт. 6) как отрезки осей, направления которых совпадают с направлениями параллельных им координатных осей,

то абсцисса точки M будет выражаться не только величиной отрезка $\overline{OP}$, но и равной ей величиной отрезка $\overline{QM}$. Ордината той же точки будет одинаково выражаться как величиной отрезка $\overline{OQ}$, так и равной ей величиной отрезка $\overline{PM}$. Направленные отрезки $\overline{OP}$, $\overline{QM}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{PM}$ будем называть координатными отрезками точки M. Тогда при решении рассмотренных двух основных задач нет необходимости определять обе проекции точки M, достаточно определить только одну, например проекцию на ось абсцисс. Так, в задаче I опускаем из данной точки M перпендикуляр на ось абсцисс. Его основание P определяет проекцию точки M на эту ось. Величина направленного отрезка $\overline{OP}$ даст абсциссу x данной точки, а величина отрезка $\overline{PM}$ — ординату y.

Пример. Построить точку по координатам $x=2$, $y=-3$. Откладываем вправо от O по оси абсцисс отрезок длиною в 2 единицы; через конец P этого отрезка проводим прямую, параллельную оси ординат, и на ней откладываем вниз от P отрезок длиною в 3 единицы; конец этого отрезка и есть искомая точка M.

Таким образом, в выбранной системе координат каждой точке плоскости соответствует вполне определённая пара координат x и y и, обратно, всякая пара действительных чисел x, y определяет на плоскости единственную точку, абсцисса которой равна x, а ордината y. Поэтому задать точку, это значит задать её координаты; найти точку, значит найти её координаты.

§ 5. Расстояние между двумя точками на плоскости. В §§ 5, 6 и 10 этой главы мы рассмотрим некоторые простейшие задачи аналитической геометрии, к которым часто приводятся многие более сложные задачи. Одной из таких задач является задача о расстоянии между двумя точками.

Черт. 8.

Пусть в выбранной на плоскости прямоугольной системе координат заданы две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$[1]. Выразим расстояние d между этими двумя точками через их координаты.

Найдём проекции точек A и B на координатные оси (черт. 8). Будем иметь:

$$\text{вел } \overline{OP_1} = x_1, \qquad \text{вел } \overline{OQ_1} = y_1,$$
$$\text{вел } \overline{OP_2} = x_2, \qquad \text{вел } \overline{OQ_2} = y_2.$$

Через одну из данных точек, например A, проведём прямую параллельно оси абсцисс до пересечения в точке C с прямой P_2B.

[1]) Ясно, что говорить о координатах точек можно лишь в том случае, когда выбрана система координат. В дальнейшем мы не будем каждый раз оговаривать введение координатной системы.

Из прямоугольного треугольника ACB получим:

$$d^2 = AC^2 + CB^2$$

(здесь AC и CB — длины сторон треугольника ACB). Но так как

$$AC = P_1P_2 = |x_2 - x_1|$$

и

$$CB = Q_1Q_2 = |y_2 - y_1|$$

(гл. I, § 3), то

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2,$$

или

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

откуда

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (3)$$

Ясно, что здесь нужно брать арифметическое значение корня.

Таким образом, *расстояние между двумя данными точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноимённых координат этих точек.*

Замечание. Если данные точки A и B будут располагаться на прямой, параллельной координатной оси, то треугольника ABC мы не получим, однако формула (3) и в этом случае будет справедлива. Действительно, если, например, точки A и B будут лежать на прямой, параллельной оси Ox, то, очевидно, $AB = P_1P_2 = |x_2 - x_1|$ (гл. I, § 3). Это же получится и из формулы (3), так как в этом случае $y_1 = y_2$.

Расстояние точки $M(x, y)$ от начала координат $O(0, 0)$ согласно формуле (3) будет

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (3')$$

Пример. Найти расстояние между точками $(-1, 4)$ и $(2, 0)$.

Искомое расстояние вычисляется по формуле (3). Здесь $x_1 = -1$, $y_1 = 4$, $x_2 = 2$, $y_2 = 0$. Следовательно,

$$d = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (0-4)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

§ 6. Деление отрезка в данном отношении. Пусть заданы две точки A и B. Проведём через них прямую и установим на ней произвольно положительное направление. Пусть M — некоторая точка этой оси. Где бы ни располагалась точка M — внутри отрезка $\overline{AB}$ или на его продолжении в ту или другую сторону — условимся говорить, что она *делит* направленный отрезок $\overline{AB}$. При этом если точка M лежит между A и B, будем говорить, что она делит отрезок $\overline{AB}$ внутренним образом; если же точка M будет лежать на продолжении отрезка, то будем говорить, что она делит отрезок внешним образом.

Назовём *отношением*, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{AB}$, число

$$\lambda = \frac{\text{вел } \overline{AM}}{\text{вел } \overline{MB}}. \qquad (4)$$

Если точка M делит отрезок $\overline{AB}$ внутренним образом, то отрезки $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ имеют одно и то же направление, а величины их — один знак и, следовательно, отношение λ положительно. Если точка M совпадёт с началом A отрезка, то $\lambda = 0$; по мере приближения делящей точки M к концу B отрезка отношение λ неограниченно возрастает, так как знаменатель (вел $\overline{MB}$) стремится к нулю. Случай совпадения делящей точки M с концом B отрезка следует исключить, так как отношение в этом случае теряет смысл (знаменатель дроби обращается в нуль).

Если точка M делит отрезок внешним образом, то при любом её расположении отрезки $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ противоположно направлены, а величины их имеют противоположные знаки и, следовательно, отношение λ, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{AB}$, отрицательно. При этом ясно, что если делящая точка M лежит вне отрезка $\overline{AB}$ за его началом, то абсолютная величина отношения λ меньше единицы; если же M лежит на продолжении отрезка за его концом, то $|\lambda| > 1$ (заметим, что ни при каком положении делящей точки M отношение λ не может быть равным — 1).

Черт. 9.

Таким образом, каждому положению точки M на прямой (кроме случая, когда M совпадает с концом рассматриваемого отрезка) соответствует определённое значение отношения λ.

Так, например, на черт. 9 точка M делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda = \frac{3}{2}$. Та же точка делит отрезок $\overline{BA}$ в отношении $\lambda = \frac{2}{3}$. Точка M_1 делит отрезок $\overline{AB}$ внешним образом в отношении $\lambda = -\frac{8}{3}$, точка M_2 делит тот же отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda = -\frac{2}{7}$.

Черт. 10.

Задачу о делении отрезка в данном отношении следует понимать так: даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и дано отношение λ, в котором некоторая точка $M(x, y)$ делит направленный отрезок $\overline{AB}$; требуется найти координаты x, y точки M.

Пусть P_1, S, P_2 суть проекции точек A, M, B на ось Ox (черт. 10). Прямые AP_1, MS и BP_2 параллельны и, следовательно, рассекают прямую AB и ось Ox на пропорциональные части, так что

$AM:MB = P_1S:SP_2$. Аналогичным равенством связаны и величины направленных отрезков $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{P_1S}$ и $\overline{SP_2}$:

$$\frac{\text{вел }\overline{AM}}{\text{вел }\overline{MB}} = \frac{\text{вел }\overline{P_1S}}{\text{вел }\overline{SP_2}}\ ^{1)}. \tag{5}$$

Так как

$$\text{вел }\overline{P_1S} = x - x_1, \quad \text{вел }\overline{SP_2} = x_2 - x$$

(гл. I, § 3) и по условию

$$\frac{\text{вел }\overline{AM}}{\text{вел }\overline{MB}} = \lambda,$$

то пропорция (5) заменится равенством

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

откуда

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad \text{или} \quad x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x,$$

т. е.

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2.$$

Вынося в левой части x за скобку, получим:

$$x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$$

и, наконец,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{6}$$

Чтобы получить ординату y точки M, нужно проектировать точки A, M, B на ось ординат; аналогично предыдущему получим:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{7}$$

Полагая в формулах (6) и (7) $\lambda = 1$, найдём координаты середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \tag{8}$$

т. е. *координаты середины отрезка равны полусуммам одноимённых координат его начала и конца.*

Из формул (6) и (7) следует, что каждому значению λ соответствует некоторая точка M прямой AB, координаты которой определяются этими формулами. Исключение представляет значение $\lambda = -1$, при котором формулы теряют смысл.

---

[1]) Действительно, модули обеих частей написанного равенства одинаковы, знаки же обеих частей равенства совпадают, так как при любом расположении точки M относительно отрезка $\overline{AB}$ (внутри или вне его с той или другой стороны), точка S всегда будет иметь аналогичное расположение относительно отрезка $\overline{P_1P_2}$.

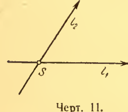
Замечание. При выводе формул (6) и (7) мы предполагали, что прямая AB не параллельна ни одной из координатных осей. Однако формулы будут справедливы и в этом случае. Действительно, если прямая AB параллельна оси Oy, то $x_1 = x_2 = x$ и формула (6) останется в силе. Точно так же и формула (7) останется справедливой, если прямая AB будет параллельна оси Ox.

Пример. Найти координаты точки M, делящей отрезок $\overline{AB}$ между точками $A(1, 2)$ и $B(-1, 4)$ в отношении $1:2$. Здесь $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = -1$, $y_2 = 4$ и $\lambda = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot(-1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}.$$

§ 7. Угол между двумя осями.

Пусть на плоскости даны две оси l_1 и l_2, пересекающиеся в точке S (черт. 11). Условимся понимать угол между двумя осями l_1 и l_2, заданными в указанном порядке, как угол, на который надо повернуть ось l_1 вокруг точки S, чтобы её положительное направление совпало с положительным направлением оси l_2. Этот угол будем обозначать $(\widehat{l_1, l_2})$. Заметим, что угол $(\widehat{l_1, l_2})$ можно также рассматривать как угол между двумя лучами, выходящими из точки S в положительных направлениях осей l_1 и l_2. Измеряя угол, как обычно, градусами или радианами[1]), как и в тригонометрии, полученное число будем брать со знаком $+$ или $-$ в зависимости от направления поворота: знак $+$, если угол получен поворотом оси l_1 против часовой стрелки, и знак $-$, если поворот этой оси совершается по часовой стрелке[2]). Ось l_1 не единственным образом можно повернуть так, чтобы её положительное направление совпало с положительным направлением оси l_2. Действительно, если мы уже повернули ось l_1 на такой угол, то после этого можно ещё дополнительно повернуть её на любое число полных оборотов по или против часовой стрелки так, что



Черт. 11.

[1]) Напомним, что между обоими способами измерения нет принципиального отличия: разница лишь в выборе единицы измерения, за которую в одном случае принимается центральный угол, опирающийся на $\frac{1}{360}$ часть окружности (градус), а в другом — центральный угол, опирающийся на дугу окружности, равную по длине радиусу (радиан). При измерении углов радианами наименование единицы измерения «радиан» обычно опускают. Говорят, например, «прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$» вместо «прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ радиана»; «угол равен 2,3» вместо «угол равен 2,3 радиана».

[2]) См. замечание в конце этого параграфа.

положительное направление её попрежнему будет совпадать с положительным направлением оси l_2.

Таким образом, для угла $(\widehat{l_1, l_2})$ между осями можно указать не одно, а бесчисленное множество значений. Если одно из этих значений обозначить через ω, то любое значение угла может быть получено по формуле

$$(\widehat{l_1, l_2}) = \omega + 2n\pi,$$

где n — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

В дальнейшем, говоря об угле между двумя осями, мы обычно будем иметь в виду какое-нибудь одно из всевозможных его значений; чаще всего — наименьшее по модулю значение.

В наших рассуждениях мы предполагали, что оси l_1 и l_2 пересекаются. В случае параллельности осей угол между ними будем считать равным нулю (или вообще $2n\pi$), если они имеют одинаковые положительные направления, и π (или вообще $\pi + 2n\pi$), если их положительные направления противоположны.

По аналогии с изложенным условимся понимать угол между осью и направленным отрезком как угол, на который надо повернуть ось, чтобы её положительное направление совпало с направлением отрезка (в случае надобности условимся продолжать отрезок до пересечения с осью).

Замечание. Мы условились считать положительными углы, отсчитываемые против часовой стрелки. Однако иногда удобнее производить отсчёт положительных углов по часовой стрелке. Выбор положительного направления отсчёта углов связан с выбором координатной системы. Возможны два типа взаимного расположения осей прямоугольной декартовой системы координат на плоскости. Если смотреть вдоль положительного направления оси Oy, то ось Ox может быть направлена вправо (черт. 12) или влево (черт. 13).

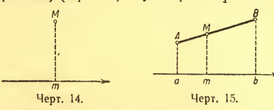
Черт. 12. Черт. 13.

В первом случае система координат называется правой, а во втором — левой. Можно пользоваться любой из этих систем координат. Как в правой, так и в левой системах положительными считают углы, отсчитываемые в ту же сторону, в какую нужно повернуть ось Ox на прямой угол, чтобы её положительное направление совпало с положительным направлением оси Oy. Очевидно (см. черт. 12 и 13),

этот поворот в случае правой системы производится против часовой стрелки, а в случае левой — по часовой стрелке. В дальнейшем мы будем, как правило, пользоваться правой системой координат и в соответствии с этим положительные углы отсчитывать против часовой стрелки.

§ 8. Основные положения теории проекций. Ранее уже отмечалось, что проекцией точки M на ось называется основание m перпендикуляра, опущенного из точки M на данную ось (черт. 14).

Пусть на плоскости дан направленный отрезок $\overline{AB}$ и некоторая ось l (ось проекций) (черт. 15). Будем рассматривать этот отрезок



Черт. 14. Черт. 15.

как путь, проходимый движущейся точкой M. При движении точки M по отрезку $\overline{AB}$ её проекция m на ось опишет некоторый направленный отрезок $\overline{ab}$, называемый геометрической проекцией направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось.

Однако в дальнейшем основную роль будет играть не геометрическая проекция отрезка, а её величина, называемая проекцией отрезка на ось.

Итак, *проекцией направленного отрезка на ось называется величина направленного отрезка оси, началом которого является проекция начальной точки проектируемого отрезка, а концом — проекция конечной точки этого отрезка.*

Заметим, что проекция направленного отрезка является *числом* (положительным, отрицательным или равным нулю). Условимся проекцию направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось l обозначать $\text{пр}_l\,\overline{AB}$ или, короче, $\text{пр}\,\overline{AB}$.

Установим основные положения теории проекций.

Проекция направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось l равна произведению длины AB этого отрезка на косинус угла α между осью проекций и данным отрезком:

$$\text{пр}_l\overline{AB} = AB \cdot \cos\alpha. \tag{9}$$

Справедливость формулы (9) достаточно доказать в предположении, что ось проекций проходит через начало проектируемого отрезка. Действительно, проекция отрезка $\overline{AB}$ не изменится, если ось проекций перенести параллельно самой себе. При этом угол между осью проекций и направленным отрезком также сохранит прежнее значение.

Пусть ось проекций l проходит через начало проектируемого отрезка $\overline{AB}$ (черт. 16).

Для доказательства равенства (9) построим тригонометрическую окружность с центром в точке A радиусом, равным длине отрезка $\overline{AB}$, и будем считать, что её начальный диаметр направлен по оси l (черт. 16). По определению косинуса имеем:

$$\cos\alpha = \frac{\text{вел}\,\overline{Ab}}{AB}.$$

Так как

$$\text{вел}\,\overline{Ab} = \text{пр}_l\,\overline{AB},$$

то

$$\cos\alpha = \frac{\text{пр}_l\,\overline{AB}}{AB},$$

откуда

$$\text{пр}_l\,\overline{AB} = AB\cos\alpha.$$

Черт. 16.

Равенство (9) доказано.

Предположим теперь, что направленный отрезок $\overline{AB}$ лежит на некоторой оси u; пусть φ — угол между осью проекций l и осью u.

Проекция направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось l равна произведению величины этого отрезка на косинус угла φ между осью проекций l и осью u, на которой дан отрезок:

$$\text{пр}_l\,\overline{AB} = \text{вел}\,\overline{AB}\cos\varphi. \qquad (10)$$

Черт. 17.

Заметим, что в этой формуле проекция выражена через *величину* направленного отрезка, расположенного на некоторой оси, тогда как в формуле (9) используется *длина* отрезка. Докажем равенство (10). В том случае, когда направление отрезка $\overline{AB}$ совпадает с положительным направлением оси u (черт. 17), равенство (10) непосредственно следует из уже доказанного равенства (9). Действительно, в рассматриваемом случае угол φ является в то же время углом α между осью проекций и отрезком; следовательно,

$$\text{пр}_l\,\overline{AB} = AB\cos\alpha = AB\cos\varphi.$$

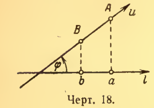
Учитывая, кроме того, что в данном случае

$$\text{вел}\,\overline{AB} = AB,$$

получим:

$$\text{пр}_l\,\overline{AB} = \text{вел}\,\overline{AB}\cos\varphi.$$

Если же направление отрезка $\overline{AB}$ противоположно направлению оси u (черт. 18), то угол α между осью проекций и отрезком $\overline{AB}$ равен $\varphi + \pi$ (действительно, если повернуть ось l сначала на угол φ, а затем дополнительно на угол π, то её положительное направление совпадёт с отрицательным направлением оси u, т. е. с направлением отрезка $\overline{AB}$). Следовательно,



Черт. 18.

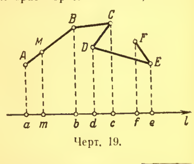
$$\text{пр}_l \overline{AB} = AB \cos \alpha =$$
$$= AB \cos (\varphi + \pi) = - AB \cos \varphi.$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае вел $\overline{AB} = - AB$, получим:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = \text{вел } \overline{AB} \cos \varphi.$$

Таким образом, равенство (10) доказано полностью.

Возьмём теперь произвольную ломаную линию $ABCDEF$ (черт. 19). Будем рассматривать эту ломаную как траекторию точки M, описывающей последовательно все звенья ломаной от начальной её точки A до конечной F. При этом на ломаной установится направление обхода, а звенья её можно будет рассматривать как направленные отрезки. Такую ломаную будем называть ***направленной*** ломаной[1]). Направленную ломаную, соединяющую последовательно точки A, B, C, D, E и F, обозначим через $\overline{ABCDEF}$.



Черт. 19.

При перемещении точки M по направленной ломаной $\overline{ABCDEF}$ проекция m этой точки на ось переместится по оси из точки a — проекции точки A — в точку f — проекцию точки F. Направленный отрезок $\overline{af}$ оси проекций называется геометрической проекцией направленной ломаной $\overline{ABCDEF}$ на ось.

Величину геометрической проекции направленной ломаной назовём проекцией направленной ломаной. Таким образом, ***проекцией направленной ломаной на ось называется величина направленного отрезка оси, началом которого является проекция начальной точки проектируемой ломаной, а концом — проекция конечной точки этой ломаной.***

Заметим, что проекция направленной ломаной на ось является *числом*.

---

[1]) Направленную ломаную в дальнейшем мы будем иногда называть просто ломаной, опуская слово «направленная», если это не может повести к недоразумению.

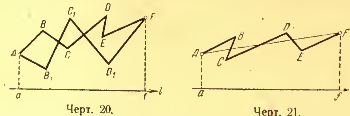
Легко показать, что *проекция направленной ломаной равна сумме проекций её звеньев.* Действительно, проектируя на ось каждое звено ломаной $\overline{ABCDEF}$ (черт. 19), мы получим:

$$\text{вел}\,\overline{af} = \text{вел}\,\overline{ab} + \text{вел}\,\overline{bc} + \text{вел}\,\overline{cd} + \text{вел}\,\overline{de} + \text{вел}\,\overline{ef}$$

(гл. I, § 1) или, если обозначить проекцию ломаной через пр $\overline{ABCDEF}$,

$$\text{пр}\,\overline{ABCDEF} = \text{пр}\,\overline{AB} + \text{пр}\,\overline{BC} + \text{пр}\,\overline{CD} + \text{пр}\,\overline{DE} + \text{пр}\,\overline{EF}. \quad (11)$$

Далее ясно, что *проекция направленной ломаной не зависит от её формы, а зависит лишь от положения её начальной и конечной точек;* поэтому *проекции двух направленных ломаных с общими началом и концом равны между собой* (черт. 20).



Черт. 20. Черт. 21.

Назовём *замыкающим отрезком* ломаной линии направленный отрезок, началом которого является начальная точка рассматриваемой ломаной, а концом — конечная её точка. Очевидно, *проекция направленной ломаной равна проекции её замыкающего отрезка* (черт. 21).

Если ломаная линия *замкнута,* т. е. её начало и конец совпадают, то ее *проекция равна нулю.*

§ 9. Проекции направленного отрезка на оси координат. В этом параграфе прежде всего мы дадим формулы, выражающие проекции направленного отрезка на координатные оси.

Пусть известны длина d направленного отрезка $\overline{AB}$ и угол α между осью Ox и этим отрезком (черт. 22).

Черт. 22.

Проекцию отрезка $\overline{AB}$ на ось Ox получим непосредственно по формуле (9) § 8: $\text{пр}_x\,\overline{AB} = d\cos\alpha$. Чтобы выразить проекцию отрезка $\overline{AB}$ на ось Oy, заметим, что угол между осью Oy и отрезком $\overline{AB}$ равен $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (действительно, если повернуть ось Oy сначала на угол $-\frac{\pi}{2}$, а затем ещё на угол α, то её положитель-

ное направление совпадёт с направлением отрезка $\overline{AB}$). Тогда $\text{пр}_y \overline{AB} = d\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = d\sin\alpha$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x \overline{AB} &= d\cos\alpha, \\ \text{пр}_y \overline{AB} &= d\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Предположим теперь, что направленный отрезок $\overline{AB}$ расположен на некоторой оси u. В таком случае проекции этого отрезка на оси координат можно выразить также через его величину и угол φ между осью Ox и осью u. По формуле (10) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x \overline{AB} &= \text{вел}\, \overline{AB} \cos\varphi, \\ \text{пр}_y \overline{AB} &= \text{вел}\, \overline{AB} \sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$\Big($так как угол между осью Oy и осью u равен $\varphi - \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi\Big)$.

Если же направленный отрезок $\overline{AB}$ задан координатами его начала $A(x_1, y_1)$ и конца $B(x_2, y_2)$, то проекции отрезка на оси координат можно выразить через координаты ограничивающих его точек.

Проекция отрезка $\overline{AB}$ на ось Ox равна величине направленного отрезка $\overline{P_1P_2}$ оси Ox (черт. 22). Так как вел $\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$ (гл. I, § 3), то $\text{пр}_x \overline{AB} = x_2 - x_1$. Совершенно так же $\text{пр}_y \overline{AB} = y_2 - y_1$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x \overline{AB} &= x_2 - x_1, \\ \text{пр}_y \overline{AB} &= y_2 - y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Заметим, что, проектируя на координатные оси направленный отрезок, идущий из начала координат в произвольную точку $M(x, y)$ плоскости, по формулам (14) получим:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x \overline{OM} &= x, \\ \text{пр}_y \overline{OM} &= y. \end{aligned}\right\} \qquad (14')$$

Таким образом, координаты x, y точки M можно рассматривать как проекции направленного отрезка $\overline{OM}$ на оси координат.

В дальнейшем нам понадобится формула, выражающая тангенс угла между осью Ox и направленным отрезком $\overline{AB}$ через координаты его начала и конца. Эту формулу легко получить, используя приведённые выше выражения проекций отрезка $\overline{AB}$ на оси координат.

Сравнивая между собой формулы (12) и (14), получим:

$$\left.\begin{aligned} d\cos\alpha &= x_2 - x_1, \\ d\sin\alpha &= y_2 - y_1, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{16}$$

Формула (16) определяет тангенс угла между осью Ox и направленным отрезком $\overline{AB}$.

Если изменить направление отрезка на прямо противоположное, то угол между осью Ox и отрезком изменится на π, но тангенс угла, очевидно, сохранит прежнее значение и будет, следовательно, определяться той же формулой (16).

§ 10. Площадь треугольника. Даны вершины треугольника: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ (черт. 23). Выразим площадь треугольника через координаты его вершин.

Пусть $CA = d_1$, $CB = d_2$ и φ — угол между направленными отрезками $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ (т. е. угол, на который нужно повернуть отрезок $\overline{CA}$ вокруг точки C, чтобы его направление совпало с направлением отрезка $\overline{CB}$; как и обычно, угол будем рассматривать со знаком).

Черт. 23.

Как известно, площадь треугольника

$$S = \left|\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi\right|.$$

Так как $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, где α_1 и α_2 — углы между осью Ox и направленными отрезками $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$, то

$$\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(d_1\cos\alpha_1 d_2 \sin\alpha_2 - d_2\cos\alpha_2 d_1 \sin\alpha_1).$$

Используя формулы (15) предыдущего параграфа, получим:

$$d_1\cos\alpha_1 = x_1 - x_3, \qquad d_1\sin\alpha_1 = y_1 - y_3,$$

$$d_2\cos\alpha_2 = x_2 - x_3, \qquad d_2\sin\alpha_2 = y_2 - y_3.$$

Тогда для площади треугольника будем иметь следующее выражение:

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right|. \tag{17}$$

Пользуясь понятием определителя (гл. VI, § 1), можно полученную формулу представить в виде

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}. \qquad (17')$$

В формуле (17′) нужно взять знак + или —, смотря по тому, будет ли определитель положительным или отрицательным.

В частности, если вершина C лежит в начале координат, то $x_3 = y_3 = 0$ и мы получим:

$$S = \pm\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}. \qquad (17'')$$

Пример. Определить площадь треугольника ABC, вершины которого суть $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(0, 5)$.

Здесь $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = -2$, $y_2 = 3$, $x_3 = 0$, $y_3 = 5$. Следовательно, по формуле (17) площадь треугольника ABC равна:

$$S = \frac{1}{2}\,|(1-0)(3-5) - (-2-0)(2-5)| = 4 \text{ кв. единицам.}$$

Если три точки A, B, C лежат на одной прямой, то треугольник ABC вырождается в отрезок и имеет площадь, равную нулю, т. е. $S = 0$. В этом случае формула (17) для S обратится в равенство

$$0 = \frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)],$$

или

$$(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) = (x_2 - x_3)(y_1 - y_3), \qquad (18)$$

что можно записать в виде пропорции:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}. \qquad (18')$$

Последнее равенство связывает координаты трёх точек A, B, C тогда и только тогда, когда эти точки лежат на одной прямой. Следовательно, написанная пропорция выражает *условие, при котором три точки лежат на одной прямой.*

Пример 1. Узнать, лежат ли точки $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(3, 4)$ на одной прямой.

Здесь $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 3$, $x_3 = 3$, $y_3 = 4$. Условие (18′) обращается в $\frac{1-3}{2-3} = \frac{2-4}{3-4}$, т. е. $2 = 2$, и, следовательно, удовлетворяется. Таким образом, три данные точки лежат на одной прямой.

Пример 2. При каком условии точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_1, y_2)$ и начало координат лежат на одной прямой?

Здесь координаты третьей точки x_3, y_3 равны нулю, и условие (18′) переходит в равенство:

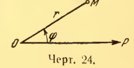
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

т. е. две точки лежат на одной прямой с началом координат тогда, когда их координаты пропорциональны.

Замечание. Переход от (18) к (18′) можно сделать лишь при условии, что ни одно из чисел $x_2 - x_3$ и $y_2 - y_3$ не равно нулю. Однако, так как равенство (18′) более удобно для запоминания, то условимся записывать его и в случае обращения знаменателей в нуль. Только тогда, конечно, эту запись нужно будет понимать не буквально, так как на нуль делить нельзя, а условно. Будем считать, что равенство (18′) всегда означает то же, что (18), т. е. что произведение крайних членов $(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)$ равно произведению средних членов $(x_2 - x_3)(y_1 - y_3)$. Например, $\frac{x_1}{0} = \frac{y_1}{1}$ значит, что $x_1 \cdot 1 = y_1 \cdot 0$, т. е. $x_1 = 0$.

§ 11. Полярные координаты. Для определения положения точки на плоскости, кроме рассмотренной выше декартовой прямоугольной системы координат, довольно часто применяется полярная система координат.

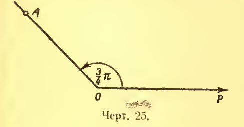
Пусть на плоскости даны некоторая точка O (назовём её *полюсом*) и проходящая через неё ось OP (назовём её *полярной осью*), а также указана единица масштаба. Будем определять положение произвольной точки M плоскости по отношению к полюсу и полярной оси. Назовём *полярным радиусом* точки M её расстояние $r = OM$ от полюса и *полярным углом* точки M угол φ между полярной осью и направленным отрезком $\overline{OM}$ (черт. 24); условимся, кроме того, угол φ брать в границах $-\pi < \varphi \leq \pi$. Тогда, очевидно, каждой точке M плоскости соответствует единственная пара чисел r, φ (исключением является полюс, для которого $r = 0$, а φ произвольно). Обратно, каждой паре чисел r, φ $(r \geq 0, \; -\pi < \varphi \leq \pi)$ соответствует единственная точка плоскости, для которой r является полярным радиусом, а φ — полярным углом. Полярный радиус и полярный угол точки будем называть её *полярными координатами*. Полярные координаты условимся записывать в скобках после буквы, обозначающей точку, указывая сначала r, а потом φ: $M(r, \varphi)$.



Черт. 24.

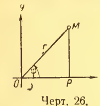
Пример. Построить точку $A\left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$ в полярной системе координат.

Проведём через полюс ось под углом $\frac{3}{4}\pi$ к полярной оси $\Big($другими словами, повернём полярную ось на угол $\frac{3}{4}\pi\Big)$ и отложим от полюса в положительном направлении построенной оси отрезок OA, равный по длине двум единицам. Конец A этого отрезка и будет искомой точкой (черт. 25).



Черт. 25.

Можно установить связь между декартовыми и полярными координатами одной и той же точки. Пусть даны декартова система координат и полярная с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающей с осью абсцисс (черт. 26). Обозначим через x и y декартовы координаты произвольной точки M, через r и φ — её полярные координаты.



Черт. 26.

Мы знаем, что

$$x = \text{пр}_x \overline{OM},$$
$$y = \text{пр}_y \overline{OM}$$

(гл. I, § 9, формулы (14')) и, с другой стороны,

$$\text{пр}_x \overline{OM} = r \cos \varphi,$$
$$\text{пр}_y \overline{OM} = r \sin \varphi$$

(гл. I, § 9, формулы (12)).

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Формулы (19) выражают декартовы координаты точки M через её полярные координаты. Чтобы найти полярные координаты точки, зная её декартовы координаты, возведём обе части каждого из равенств (19) в квадрат и затем сложим их почленно. Получим:

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi),$$

т. е.

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

откуда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (20)$$

Далее, из равенств (19) получим:

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{y}{x}. \qquad (21)$$

По формуле (21) определяется тангенс полярного угла φ; при этом получаются два значения φ (напомним, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$), лежащие в разных четвертях. Так как $y = r \sin \varphi$, то из этих двух значений угла φ нужно выбрать то, для которого синус имеет тот же знак, что и y.

Пример. Даны декартовы координаты точки M: $x = 1$, $y = -1$. Найти полярные координаты. По формулам (20) и (21) имеем:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \text{tg}\, \varphi = -1.$$

Из двух значений $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ и $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ нужно взять $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, так как $\sin \varphi$ в данном случае должен иметь отрицательный знак.

Итак, полярные координаты данной точки

$$r=\sqrt{2},\ \varphi=-\frac{\pi}{4}.$$

Замечание. Для введённых нами полярных координат $r \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Однако такое ограничение иногда оказывается стеснительным; в дальнейшем мы будем считать, что r и φ могут принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. В таком случае построение точки по её полярным координатам r и φ условимся производить следующим образом.

Проведём через полюс O ось под углом φ к полярной оси (т. е., другими словами, проверпём полярную ось на угол φ, делая, в случае надобности, несколько полных оборотов) и отложим от полюса отрезок OM длиною $|r|$ в положительном направлении построенной оси, если $r>0$, и в отрицательном при $r<0$. Конец M этого отрезка будет искомой точкой. Очевидно, при таком построении полярный радиус точки M равен величине направленного отрезка $\overline{OM}$, лежащего на оси, проведённой под углом φ к полярной оси. Существенно, что паре любых действительных чисел r и φ соответствует единственная точка M. Именно поэтому эти числа и считаются координатами точки.

Заметим ещё, что формулы (19) остаются справедливыми не только при $r \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, но и в общем случае. Для доказательства этого нужно воспользоваться выражениями проекций направленного отрезка $\overline{OM}$ на оси координат через его величину r и угол φ между осью Ox и осью, на которой лежит этот направленный отрезок (гл. I, § 9, формулы (13)). В этом случае при нахождении r из формулы $r^2=x^2+y^2$ радикал можно брать с любым знаком

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2}; \tag{20'}$$

после этого угол φ может быть найден по формуле (21), причём φ выбирается так, чтобы $\sin\varphi$ имел тот же знак, что и $\frac{y}{r}$ (так как $y=r\sin\varphi$).

Упражнения [1])

1. Построить точки, определяемые в данном масштабе координатами:

$x=2,\quad y=5;\qquad x=-3,\quad y=0;\qquad x=3,\quad y=-4;$

$x=0,\quad y=4;\qquad x=3,\quad y=-3;\qquad x=\sqrt{2},\quad y=1.$

2. Дана точка определяемая координатами $x=5$, $y=-2$. Найти координаты точки, симметричной с данной относительно оси абсцисс.

3. Найти точку B, симметричную точке $A(2,-4)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов.

[1]) Ответы к упражнениям помещены в конце книги; к упражнениям, номера которых помечены звёздочкой, даны решения.

4. Найти координаты точки, симметричной $A(a, b)$ относительно оси абсцисс.

5. Найти координаты точки, симметричной $A(a, b)$ относительно оси ординат.

6. Найти координаты точки, симметричной $A(a, b)$ относительно начала координат.

7. Показать, что точка A_2, симметричная $A_1(a, b)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов, будет иметь координаты (b, a).

8. Дан квадрат со стороной, равной 2 единицам. Чему будут равняться координаты вершин этого квадрата, если оси координат направить по каким-нибудь двум из его непараллельных сторон?

9. Дан квадрат, сторона которого равна 2 единицам. Чему будут равняться координаты его вершин, если оси координат направить по диагоналям этого квадрата?

10. Дан ромб, сторона которого равна 5 единицам, а одна из диагоналей 6 единицам. Чему будут равняться координаты его вершин, если оси координат направить по диагоналям этого ромба?

11. Найти координаты вершин правильного шестиугольника, сторона которого равна a, при условии, что начало координат помещено в центре шестиугольника, а ось абсцисс проходит через две противоположные его вершины.

12. Точка, двигаясь прямолинейно, переместилась из точки $A(-3, -2)$ в точку $B(4, 5)$. Определить пройденный путь и угол α между осью Ox и направлением движения.

13. Есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами в точках $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$ и $C(3, 3)$ тупой угол?

14. Доказать, что треугольник, вершинами которого служат точки $A(3, 2)$, $B(6, 5)$, $C(1, 10)$, — прямоугольный.

15. Найти периметр треугольника с вершинами $A(2, 3)$, $B(-3, 3)$, $C(0, -1)$.

16. Найти длины медиан треугольника с вершинами $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(0, 3)$.

17. Проведён отрезок от точки $(1, -1)$ до точки $(-4, 5)$. До какой точки нужно продолжить его в том же направлении, чтобы его длина утроилась?

18. Найти на оси абсцисс точку, которая отстоит на одинаковом расстоянии от начала координат и от точки $(-5, 3)$.

19. Найти точку, находящуюся на равных расстояниях от осей координат и от точки $(3, 6)$.

20. Найти точку, находящуюся на расстоянии 10 единиц от оси абсцисс и от точки $(-5, 2)$.

21. Прямая линия проходит через точки $A(2, 4)$ и $B(5, 1)$. Найти на ней точку, абсцисса которой равна -3.

22. Расстояние между точками $(x, 5)$ и $(-2, y)$ делится в точке $(1, 1)$ пополам. Найти эти точки.

23. Разделить отрезок между точками $(0, 2)$ и $(8, 0)$ в таком же отношении, в каком находятся расстояния этих точек от начала координат.

24. Две вершины треугольника даны координатами $x_1 = 3$, $y_1 = 7$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 5$. Найти третью вершину при условии, чтобы середины проходящих через неё сторон лежали на осях координат.

25. Основание треугольника равно a, высота равна h и одна из двух других сторон равна b. Принимая основание и высоту за оси координат, найти координаты середины третьей стороны.

26*. Определить точку пересечения медиан треугольника, вершины которого суть $A(1, 2)$, $B(0, 5)$, $C(-2, 3)$.

27. Вершины треугольника суть $(5, 0)$, $(3, -8)$, $(1, -4)$. Найти точки, в которых медианы его делятся на три равные части.

28. Выразить координаты центра тяжести треугольника через координаты его вершин.

29. Показать, что если система состоит из n материальных точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2), \ldots, A_n(x_n, y_n)$, в которых сосредоточены соответственно массы $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, то координаты центра тяжести этой системы определятся формулами

$$x = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + \ldots + y_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

30. Определить площадь треугольника с вершинами в точках $A(0, 1)$, $B(3, 4)$, $C(-1, -1)$.

31. Вычислить площадь четырёхугольника с вершинами в точках $A(-2, -3)$, $B(-1, 4)$, $C(3, 3)$ и $D(6, -1)$.

32. Узнать, лежат ли точки (2, 3), (5, 7), (11, 15) на одной прямой.

33. Определить величину и направление силы P, зная, что её проекции на оси координат равны $P_x = 5$, $P_y = 12$.

34. Найти центр тяжести проволочного треугольника, вершины которого лежат в точках $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ и $B(3, 4)$.

35. Однородная доска имеет вид прямоугольной трапеции, большее основание которой равно a, меньшее b и высота h. Найти положение её центра тяжести (толщиной пренебречь).

36. Найти декартовы координаты точек, полярные координаты которых следующие:

$$A\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right); \quad B\left(4, \frac{\pi}{3}\right);$$

$$C\left(4\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right); \quad D\left(2, -\frac{\pi}{6}\right).$$

37. Найти полярные координаты точек, декартовы координаты которых следующие:

$$A(3, -2),\ B(-1, -1),\ C(3, 0),\ D(0, -4).$$

ГЛАВА II

ЛИНИИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Составление уравнений заданных линий. В предыдущей главе было показано, что в декартовой системе координат каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел и, наоборот, каждой такой паре чисел соответствует определённая точка плоскости.

Теперь установим, что линиям на плоскости соответствуют уравнения с двумя переменными. Эта связь между линиями и уравнениями позволит свести изучение геометрических свойств линий к исследованию аналитических свойств соответствующих им уравнений.

В аналитической геометрии всякую линию рассматривают как геометрическое место точек. В определении линии как геометрического места точек содержится свойство, общее всем её точкам. Так, например, окружность с центром в точке C и радиусом R можно рассматривать как геометрическое место точек плоскости, отстоящих от C на расстоянии R. Это значит, что для всякой точки M, лежащей на окружности, $MC = R$, если же точка M не лежит на окружности, то $MC \neq R$.

Возьмём на плоскости какую-нибудь линию, выберем в этой плоскости декартову систему координат и рассмотрим произвольную точку указанной линии. Если эта точка будет перемещаться по данной линии, то её координаты x и y будут меняться, оставаясь, однако, связанными некоторым условием, характеризующим точки линии. Таким образом, мы получаем некоторое соотношение между x и y, которое будет выполняться только при движении точки по линии и нарушится, если точка сойдёт с линии.

Следовательно, линии на плоскости соответствует некоторое уравнение с двумя переменными x и y. *Такое уравнение между переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней, называется уравнением данной линии.* Входящие в это уравнение координаты x и y произвольной точки линии называются *текущими координатами*.

Рассмотрим несколько простейших примеров составления уравнений данных линий.

Пример 1. Найти уравнение прямой, делящей пополам отрезок между точками $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ и перпендикулярной к нему.

Будем рассматривать эту прямую как геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и B. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка указанной прямой. Равенство

$$AM = BM \tag{1}$$

выражает общее свойство всех точек этой прямой (если же M не будет лежать на данной прямой, то $AM \neq BM$). Для составления уравнения прямой остаётся выразить расстояния AM и BM через координаты точки M и полученные выражения подставить в равенство (1). Тогда

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}.$$

Это уравнение и является уравнением данной прямой. Возводя обе части его в квадрат, после упрощений получим:

$$2x - y + 5 = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение окружности радиуса R.

Выберем произвольно оси координат. Тогда центр C окружности будет иметь некоторые координаты a и b.

Обозначая через x и y координаты произвольной точки M окружности, выразим аналитически свойство, общее всем точкам M. Из определения окружности следует, что расстояние точки M от центра C окружности (черт. 27) есть величина постоянная, равная радиусу R, т. е.

$$CM = R. \tag{2}$$

Определяя CM как расстояние между двумя точками C и M (гл. I, § 5), мы выразим равенство (2) с помощью текущих координат точки M:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R. \tag{2'}$$

Черт. 27.

Возвышая обе части последнего уравнения в квадрат, получим уравнение окружности в окончательном виде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \tag{3}$$

В этом уравнении постоянные a, b, R суть соответственно координаты центра и радиус окружности; переменные x и y являются координатами произвольной точки окружности. В частности, если начало координат выбрано в центре окружности, то $a = b = 0$, и уравнение (3) принимает более простой вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{3'}$$

§ 2. Геометрический смысл уравнений. Мы видели, что всякая линия, рассматриваемая как геометрическое место точек, определяется уравнением между координатами её точек. Обратно, всякое уравнение между двумя переменными x и y, вообще говоря, определяет линию как геометрическое место точек, координаты которых x и y ему удовлетворяют.

В самом деле, рассмотрим какое-нибудь уравнение между переменными x и y. Перенося все его члены в левую часть, придадим уравнению вид:

$$F(x, y) = 0, \tag{4}$$

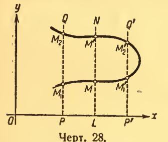
где F означает символ функции двух переменных. Пусть при любом фиксированном числовом значении x уравнение (4), рассматриваемое

как уравнение относительно неизвестного y, имеет, например, два действительных корня.

Дадим переменному x произвольное числовое значение $x = a$ и найдём из уравнения (4) соответствующие значения y. Для определения y получаем уравнение с одним неизвестным:

$$F(a, y) = 0. \qquad (5)$$

Пусть это уравнение имеет корни, например, $y = b_1$, $y = b_2$. Отметим на черт. 28 две точки M_1 и M_2, координаты которых (a, b_1) и (a, b_2) удовлетворяют данному уравнению (4).



Черт. 28.

Дадим теперь переменному x другое числовое значение $x = a'$ и определим соответствующие значения y из уравнения

$$F(a', y) = 0. \qquad (5')$$

Пусть корни этого уравнения будут $y = b_1'$, $y = b_2'$. Отметим на черт. 28 две точки M_1' и M_2', координаты которых (a', b_1') и (a', b_2') удовлетворяют данному уравнению. Если переменное x мы будем непрерывно изменять от значения a до значения a', то прямая LN будет перемещаться параллельно самой себе, отправляясь от положения PQ и приходя в положение $P'Q'$, причём в любом её положении на ней будут две точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (4). Таким образом, точки M и M' описывают линию. Эта линия получается в результате двух движений: с одной стороны, движения прямой LN параллельно самой себе (изменение x), а с другой — движения точек M и M' по этой прямой (изменение y).

Итак, *уравнение* (4) *между координатами* x *и* y *определяет линию как геометрическое место тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.*

Рассмотрим несколько примеров на построение линий, заданных уравнениями.

Пример 1. Построить линию, определяемую уравнением $x - y = 0$.

Уравнение можно переписать в виде:

$$y = x.$$

Очевидно, геометрическое место точек, для которых абсцисса равна ординате, представляет собой биссектрису AB I и III координатных углов (черт. 29). Уравнение $x - y = 0$ определяет, следовательно, эту биссектрису.

Черт. 29.

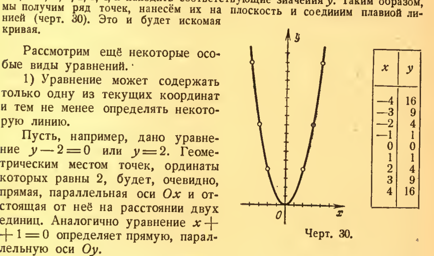
Пример 2. Построить линию, определяемую уравнением $x + y = 0$.

Легко видеть, что геометрическим местом точек, для которых $y = -x$, будет биссектриса CD II и IV координатных углов. Следовательно, уравнение $x + y = 0$ является уравнением этой биссектрисы (черт. 29).

Пример 3. Построить линию, определяемую уравнением $x^2 - y = 0$.

Выразим из этого уравнения одну из координат через другую (например, y через x): $y = x^2$.

Будем давать x различные произвольные значения, например —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, и находить соответствующие значения y. Таким образом, мы получим ряд точек, нанесём их на плоскость и соединим плавной линией (черт. 30). Это и будет искомая кривая.



x	y
—4	16
—3	9
—2	4
—1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Черт. 30.

Рассмотрим ещё некоторые особые виды уравнений.

1) Уравнение может содержать только одну из текущих координат и тем не менее определять некоторую линию.

Пусть, например, дано уравнение $y - 2 = 0$ или $y = 2$. Геометрическим местом точек, ординаты которых равны 2, будет, очевидно, прямая, параллельная оси Ox и отстоящая от неё на расстоянии двух единиц. Аналогично уравнение $x + 1 = 0$ определяет прямую, параллельную оси Oy.

2) Если левая часть уравнения $F(x, y) = 0$ разлагается на множители, то, приравнивая нулю каждый множитель в отдельности, получим несколько новых уравнений, каждое из которых может определять некоторую линию. Например, уравнение $x^2 - y^2 = 0$ или $(x + y)(x - y) = 0$ определяет пару прямых $x + y = 0$ и $x - y = 0$ — биссектрис координатных углов.

3) В частности, может случиться, что уравнение $F(x, y) = 0$ между координатами x и y определяет геометрическое место, состоящее из одной или нескольких отдельных точек. Так, например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет точку $O(0, 0)$; уравнению

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$$

соответствует геометрическое место, состоящее из четырёх точек:

$$(1, 2);\ (1, -2);\ (-1, 2);\ (-1, -2).$$

4) Может, наконец, случиться, что уравнение $F(x, y) = 0$ не определяет никакого геометрического места точек. Так, например, уравнение

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

не удовлетворяется ни одной парой действительных значений координат x и y.

Если уравнение удовлетворяется, как в только что приведённом примере, лишь в том случае, когда хотя бы одно из переменных,

x, y имеет мнимое значение, то говорят, что уравнению соответствует *мнимое место точек*.

§ 3. Две основные задачи. Из изложенного в §§ 1 и 2 вытекает постановка двух основных задач.

I. *Дана линия как геометрическое место точек. Составить уравнение этой линии.*

II. *Дано уравнение между координатами x и y. Построить линию, определяемую этим уравнением.*

В следующей главе мы рассмотрим общее решение той и другой задач в отношении прямой линии.

§ 4. Пересечение двух линий. Среди различных геометрических задач одно из важных мест занимает задача нахождения точек пересечения двух данных линий.

Пусть эти линии определяются соответственно уравнениями

$$f(x, y) = 0 \text{ и } \varphi(x, y) = 0.$$

Если существует точка их пересечения, то, очевидно, она лежит и на той и на другой линии. Поэтому координаты её должны удовлетворять каждому из данных уравнений, и, наоборот, всякая точка, координаты которой удовлетворяют этим двум уравнениям, лежит на обеих линиях. Следовательно, чтобы найти точки пересечения двух данных линий, нужно совместно решить их уравнения. Каждое действительное решение этой системы уравнений даст точку пересечения. Если же окажется, что эта система несовместна или во всех её решениях хотя бы одно из чисел x или y имеет мнимое значение, то это будет означать, что данные линии не пересекаются.

Пример. В § 1 настоящей главы было выведено уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R в виде

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Возьмём радиус, равный 5 единицам. Тогда уравнение такой окружности примет вид: $x^2 + y^2 = 25$.

В примере 1 того же параграфа было выведено уравнение некоторой прямой $2x - y + 5 = 0$.

Пусть требуется найти точки пересечения этих линий. Для этого нужно решить систему уравнений

$$x^2 + y^2 = 25,$$
$$2x - y + 5 = 0.$$

Из последнего уравнения имеем:

$$y = 2x + 5.$$

Подставляя это выражение y в первое уравнение, получим:

$$x^2 + (2x + 5)^2 = 25.$$

После упрощений будем иметь:

$$x^2 + 4x = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -4.$$

Подставляя эти значения x в ранее найденное выражение y, получим:

$$y_1 = 5 \quad \text{и} \quad y_2 = -3.$$

Следовательно, данные линии имеют две точки пересечения (0, 5) и (—4, —3).

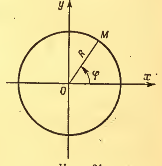
§ 5. Параметрические уравнения линий. В некоторых случаях при составлении уравнения линии текущие координаты не связывают одним уравнением, а каждую координату в отдельности выражают в виде функции нового переменного, например t. Получают уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Эти уравнения составляются так, что значения x и y, соответствующие одному и тому же значению t, являются координатами точки, лежащей на данной линии.

С изменением t меняются и координаты x и y, а следовательно, соответствующая им точка перемещается по линии. Уравнения (6) называются параметрическими уравнениями линии, а t — переменным параметром.

Если из уравнений (6) исключить параметр t, то получим уравнение между x и y вида $F(x, y) = 0$.



Черт. 31.

Пример. Составим параметрические уравнения окружности радиуса R, центр которой лежит в начале координат (черт. 31). Легко усмотреть, что текущие координаты точки на окружности являются функциями угла φ, образованного осью Ox и радиусом окружности, проведённым в данную точку. Поэтому примем угол φ за переменный параметр и выразим через него текущие координаты x и y. При любом положении точки M на окружности будут иметь место равенства

$$x = R\cos\varphi,$$
$$y = R\sin\varphi$$

(гл. I, § 9).

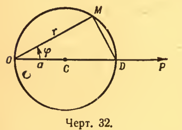
Это и есть параметрические уравнения окружности. При желании из них можно получить уравнение окружности в форме, известной из предыдущего. Для этого нужно исключить параметр φ. Возводя обе части каждого из уравнений в квадрат и складывая, получим:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

§ 6. Уравнения линий в полярных координатах. Ранее мы рассматривали уравнения линий в декартовых координатах, но аналогично можно говорить и об уравнениях линий в полярных координатах. Уравнением линии в полярной системе координат мы будем называть такое уравнение между переменными r и φ, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не

удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей. Рассмотрим пример на нахождение уравнения данной линии в полярных координатах.

Пусть требуется найти уравнение окружности, проходящей через полюс, центр которой C лежит на полярной оси, а радиус равен a. Соединим отрезками прямой произвольную точку M окружности с полюсом и с конечной точкой D диаметра, проходящего через полюс (черт. 32). Координатами точки M будут угол φ и длина r отрезка OM. Припомним, что окружность есть геометрическое место вершин прямых углов, опирающихся на её диаметр. Следовательно, треугольник OMD — прямоугольный.



Черт. 32.

Отсюда получаем:

$$r = 2a \cos \varphi.$$

Это и есть искомое уравнение окружности [1]).

Заметим, что вид уравнения данной линии зависит от выбора полюса и полярной оси. Так, если мы выберем полюс в центре окружности радиуса a, то для всех точек окружности (и только для этих точек) полярный радиус будет иметь одно и то же значение $r = a$; это равенство будет, следовательно, уравнением окружности радиуса a с центром в полюсе. Полярный угол φ в это уравнение не входит, оставаясь произвольным.

При исследовании формы линии на основании её уравнения приходится часто пользоваться полярными координатами. Это удобно делать всякий раз, когда уравнение линии в полярных координатах проще, чем в декартовых. В качестве примеров мы рассмотрим две линии, часто встречающиеся в приложениях.

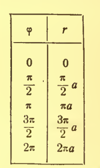
Пример 1. Линия, называемая *спиралью Архимеда*, определяется в полярных координатах уравнением

$$r = a\varphi,$$

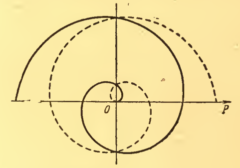
где a есть положительная постоянная. Чтобы начертить эту линию, будем давать φ произвольные значения и определять соответствующие значения r. Приводимая таблица значений (r, φ), удовлетворяющих данному уравнению, показывает, что при возрастании угла φ в арифметической прогрессии с разностью $\frac{\pi}{2}$ полярный радиус r возрастает тоже в арифметической прогрессии с разностью $a\frac{\pi}{2}$. Кроме того, заметим, что всякой точке этой линии с положительными координатами (r, φ) соответствует на этой же линии точка

[1]) При выводе этого уравнения r считалось положительным. Однако при некоторых значениях φ из уравнения будут получаться отрицательные значения r. Тем не менее легко проверить, что и в этом случае получаемые точки лежат на той же окружности.

$(-r, -\varphi)$, т. е. спираль Архимеда симметрично расположена относительно прямой, проходящей через полюс перпендикулярно к полярной оси. На черт. 33 сплошной линией изображена ветвь, соответствующая положительным значениям φ, а пунктирной — отрицательным.



φ	r
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}a$
π	πa
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}a$
2π	$2\pi a$



Черт. 33.

Пример 2. Линия, определяемая в полярных координатах уравнением

$$r = ae^{k\varphi},$$

где a и k суть положительные постоянные, называется *логарифмической спиралью*.

Чтобы начертить эту линию, будем давать φ произвольные значения и определять соответствующие значения r. Приводимая здесь таблица значений (r, φ), удовлетворяющих данному уравнению, показывает, что при возрастании угла φ в арифметической прогрессии с разностью $\frac{\pi}{2}$ полярный радиус r возрастает в геометрической прогрессии со знаменателем $e^{k\pi/2}$. Когда угол φ неограниченно возрастает, то r тоже неограниченно растёт; когда угол φ стремится к отрицательной бесконечности, то полярный радиус стремится к нулю и кривая неограниченно приближается к полюсу O, закручиваясь около него. Поэтому точка O называется асимптотической точкой логарифмической спирали (черт. 34).

φ	r
$-\pi$	$ae^{-k\pi}$
$-\frac{\pi}{2}$	$ae^{-k\pi/2}$
0	a
$\frac{\pi}{2}$	$ae^{k\pi/2}$
π	$ae^{k\pi}$

Черт. 34.

Иногда встречается надобность в переходе от уравнения линии в декартовых координатах к уравнению той же линии в полярных координатах или обратно. В таком случае следует применять формулы, связывающие полярные и декартовы координаты (гл. I, § 11).

Пример. Уравнение окружности в полярных координатах

$$r = 2a\cos\varphi$$

записать в декартовых координатах.

Выражаем r и $\cos\varphi$ через x и y

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение, после упрощений получим:

$$x^2+y^2-2ax=0.$$

Упражнения

1*. Построить кривую, заданную уравнением $x^2y=4a^2(2a-y)$. (Эта кривая носит название *локона Аньези*.)

2*. Построить кривую, заданную уравнением $r=10\sin 2\varphi$. (Эта кривая называется *четырёхлепестковой розой*.)

3. Построить кривые, заданные уравнениями:

а) $y=x^3$; б) $y=x^5$; в) $y=x^4$; г) $y=x^3+2$; д) $y=\frac{1}{2}x^4-5$; е) $y^2=x^3$.

4. Построить кривые, которым в полярных координатах соответствуют уравнения:

а) $r=a\sin 3\varphi$; б) $r=a\cos 3\varphi$; в) $r=a\cos 2\varphi$; г) $r=a(1-\cos\varphi)$.

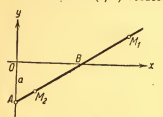
5. Построить кривые, заданные в полярных координатах уравнениями

а) $r=2-\cos\varphi$; б) $r=3-2\sin 2\varphi$; в) $r=2-\sin 3\varphi$.

6. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от начала координат и от точки A $(-5, 3)$.

7. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от оси Ox и от точки F $(0, 4)$. Построить кривую.

8. Определить траекторию точки M, которая движется так, что её расстояние от точки A $(3, 0)$ остаётся вдвое меньше расстояния от точки B $(-6, 0)$.



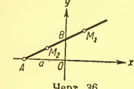
Черт. 35.

9. Определить траекторию точки M, которая движется так, что её расстояние от точки F $(-1, 0)$ остаётся вдвое меньше расстояния от прямой $x=-4$.

10*. Найти уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек P и Q есть величина постоянная, равная m^2. Расстояние между P и Q равно $2n$. (Это геометрическое место точек называется *овалом Кассини*.) Построить эту линию.

11*. Овал Кассини (см. упражнение 10) для случая, когда $m=n$, называется *лемнискатой Бернулли*. Найти уравнение лемнискаты: а) в декартовых координатах и б) в полярных координатах. Построить эту кривую.

12*. Даны прямая Ox и на расстоянии a от неё точка A (черт. 35). Если прямая AB будет вращаться около точки A, то точки M_1 и M_2, лежащие на этой прямой и отстоящие от точки B пересечения прямой AB с основной прямой Ox на данное расстояние b, опишут некоторую линию. Она называется *конхоидой Никомеда*. Найти уравнение конхоиды и построить её для случаев $a>b$, $a=b$ и $a<b$.

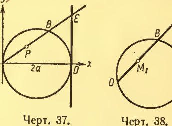


Черт. 36.

13*. Даны прямая Oy и точка A на расстоянии a от неё (черт. 36). Вокруг точки A вращается луч AB и на нём в обе стороны от точки B (точки пересечения луча с осью Oy) отложены переменные отрезки BM_1 и BM_2, равные по длине OB. При вращении луча AB точки M_1 и M_2 описывают кривую, называемую *строфоидой*. Составить уравнение этой кривой и построить её.

14*. Даны окружность диаметра $OD = 2a$ и касательная к ней DE (черт. 37). Через точку O, диаметрально противоположную точке D, проведён луч OE и на нём отложен отрезок OP, равный отрезку BE, заключающемуся между окружностью и касательной. Если луч OE будет вращаться около точки O, то точка P опишет кривую, называемую *циссоидой Диоклеса*. Найти уравнение этой кривой и построить её.

15*. Даны окружность радиуса a и на ней точка O (черт. 38). Если прямая OB будет вращаться около точки O, то точки M_1 и M_2, находящиеся на данной прямой и отстоящие на данное расстояние m от точки B пересечения прямой с окружностью, опишут кривую, называемую *улиткой Паскаля*[1]). Найти уравнение этой кривой в полярных координатах и построить её. (Кривые вычертить для случаев $m > 2a$, $m = 2a$ и $m < 2a$.)



Черт. 37. Черт. 38.

16. Составить уравнение геометрического места точек, равноудалённых от двух данных точек.

17. Две прямые вращаются вокруг двух неподвижных точек, оставаясь всё время перпендикулярными друг к другу. Найти уравнение линии, описываемой точкой их пересечения.

18. Из точки M проведены к двум окружностям радиусов R и r две равные касательные. Найти уравнение геометрического места точек M при условии, что расстояние между центрами окружностей равно $2d$.

19. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины прямого угла на этот отрезок опущен перпендикуляр OM. Найти уравнение геометрического места оснований этих перпендикуляров в полярных координатах и построить эту линию.

20. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от сторон квадрата равна постоянной величине.

21. Написать уравнение циссоиды $x^3 = y^2(2a - x)$ в полярных координатах.

22. Написать уравнения кривых:

а) $r = m + 2a\cos\varphi$ (улитка Паскаля);
б) $r = a\sin 2\varphi$ (четырёхлепестковая роза)

в декартовых координатах.

23*. Круг радиуса a катится по оси абсцисс. Найти параметрические уравнения линии, описываемой при указанном движении той точкой окружности, которая при начальном положении окружности находилась в начале координат.

24. Тело брошено вверх со скоростью v под углом α к горизонту. Найти, пренебрегая сопротивлением воздуха, параметрические уравнения траектории тела (за параметр принять время).

---

[1]) Для частного случая, когда $m = 2a$, эта линия называется *кардиоидой*.

ГЛАВА III

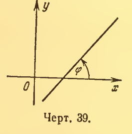
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 1. Угловой коэффициент прямой. В предыдущей главе было показано, что, выбрав определённую систему координат на плоскости, мы можем геометрическое свойство, характеризующее точки рассматриваемой линии, выразить аналитически уравнением между текущими координатами. Таким образом, мы получим уравнение линии. В этой главе будут рассматриваться уравнения прямых линий.

Чтобы составить уравнение прямой в декартовых координатах, нужно каким-то образом задать условия, определяющие положение её относительно координатных осей.

Предварительно мы введём понятие об угловом коэффициенте прямой, который является одной из величин, характеризующих положение прямой на плоскости.

Назовём *углом наклона прямой к оси Ox* тот угол, на который нужно повернуть ось Ox, чтобы она совпала с данной прямой (или оказалась параллельной ей). Как обычно, угол будем рассматривать с учётом знака (знак определяется направлением поворота: против или по часовой стрелке). Так как добавочный поворот оси Ox на угол в 180° снова совместит её с прямой, то угол наклона



Черт. 39.

Черт. 40.

прямой к оси Ox может быть выбран не однозначно (с точностью до слагаемого, кратного π).

Тангенс этого угла определяется однозначно (так как изменение угла на π не меняет его тангенса).

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется угловым коэффициентом прямой.

Угловой коэффициент характеризует направление прямой (мы здесь не различаем двух взаимно противоположных направлений прямой). Если угловой коэффициент прямой равен нулю, то прямая параллельна оси абсцисс. При положительном угловом коэффициенте угол наклона прямой к оси Ox будет острым (мы рассматриваем здесь наименьшее положительное значение угла наклона) (черт. 39); при этом чем больше угловой коэффициент, тем больше угол её наклона к оси Ox. Если угловой коэффициент отрицателен, то угол наклона прямой к оси Ox будет тупым (черт. 40). Заметим, что прямая, перпендикулярная к оси Ox, не имеет углового коэффициента (тангенс угла не существует).

§ 2. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом. Рассмотрим прямую линию, не параллельную оси ординат. Положение её на плоскости будет вполне определено, если задать угол наклона прямой к оси абсцисс и величину отрезка, отсекаемого ею на оси ординат, т. е. величину направленного отрезка оси ординат, началом которого является начало координат, а концом — точка пересечения прямой с осью Oy.

Обозначим угол наклона прямой к оси Ox через φ, а величину отрезка $\overline{OB}$, отсекаемого прямой на оси Oy, через b. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка прямой (черт. 41). Когда точка M движется по прямой, то её координаты x и y, изменяясь, остаются всё время связанными между собой некоторым условием. Посмотрим, каково это условие.

Черт. 41.

Рассмотрим направленный отрезок $\overline{BM}$. Зная координаты его начала и конца

$$B(0, b), \ M(x, y),$$

выразим проекции его на оси координат (гл. I, § 9)

$$\text{пр}_x \overline{BM} = x,$$
$$\text{пр}_y \overline{BM} = y - b.$$

Тогда по формуле (16) гл. I, § 9 получим:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{y-b}{x}.$$

Отсюда

$$y - b = x\,\text{tg}\,\varphi, \quad \text{или} \quad y = x\,\text{tg}\,\varphi + b$$

и окончательно

$$y = kx + b, \tag{1}$$

где $k = \text{tg}\,\varphi$.

Этому уравнению удовлетворяют лишь координаты точки рассматриваемой прямой; оно нарушается, если точка не лежит на прямой. Таким образом, полученное уравнение (1) является уравнением заданной прямой линии.

Уравнение прямой вида (1) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Уравнение (1) мы получили, считая, что прямая не параллельна оси Oy. Посмотрим теперь, какое уравнение будет иметь прямая, параллельная оси Oy.

Пусть a — абсцисса точки пересечения этой прямой с осью Ox (черт. 42). Очевидно, любая точка прямой имеет абсциссу, равную a; если же точка не лежит на прямой, то абсцисса её будет отлична от a. Следовательно, эта прямая имеет уравнение

$$x = a. \qquad (2)$$

Черт. 42.

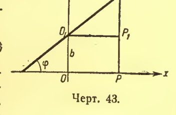
Итак, если прямая не параллельна оси Oy, то её уравнение может быть записано в форме (1), если же прямая параллельна оси Oy, то её уравнение может быть записано в форме (2). Так как уравнения (1) и (2) являются уравнениями первой степени относительно переменных x и y, то тем самым мы доказали, что в декартовой системе координат *всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени.*

В частности, если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и уравнение такой прямой будет иметь вид:

$$y = kx. \qquad (3)$$

Если прямая параллельна оси Ox, то угловой коэффициент её $k = 0$, и уравнение прямой будет

$$y = b. \qquad (4)$$



Черт. 43.

Замечание. Связь между текущими координатами x, y и постоянными k и b, выражаемая уравнением (1), может быть усмотрена непосредственно из черт. 43 при указанном (специальном) расположении прямой относительно координатных осей.

В самом деле:

$$PM = PP_1 + P_1M.$$

Но

$$PM = y, \quad PP_1 = OO_1 = b,$$

а P_1M определяется из прямоугольного треугольника O_1P_1M:

$$P_1M = O_1P_1 \operatorname{tg} \varphi = x \operatorname{tg} \varphi = kx.$$

Внося эти значения в первое равенство, мы получим:

$$y = b + kx, \quad \text{или} \quad y = kx + b.$$

Пример. Составить уравнение прямой линии, отсекающей на оси ординат отрезок, величина которого равна -2, и наклонённой к оси абсцисс под углом в 45°.

Здесь $b = -2$ и $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Следовательно, искомое уравнение

$$y = x - 2.$$

§ 3. Геометрический смысл уравнения первой степени между двумя переменными. В предыдущем параграфе было показано, что в декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени. Естественно теперь поставить обратный вопрос: всякое ли уравнение первой степени относительно переменных x и y определяет прямую? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим уравнение первой степени общего вида и выясним, каково геометрическое место тех точек плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению. Мы покажем, что искомым геометрическим местом точек является прямая линия.

Общее уравнение первой степени относительно x и y имеет вид:

$$Ax + By + C = 0. \tag{5}$$

Здесь A, B и C — произвольные числа; при этом, конечно, коэффициенты A и B при переменных не могут быть одновременно равны нулю (иначе уравнение (5) не содержало бы переменных x и y и не было бы уравнением).

Разрешим уравнение (5) относительно y (предполагая, что $B \neq 0$). Получим:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

или, вводя обозначения $-\frac{A}{B} = k$ и $-\frac{C}{B} = b$,

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Но мы видели в предыдущем параграфе, что уравнение (1) является уравнением прямой линии, имеющей угловой коэффициент k и отсекающей на оси ординат отрезок величиной b.

Наши рассуждения мы проводили в предположении, что коэффициент B в уравнении (5) отличен от нуля. Если же $B = 0$, то уравнение (5) имеет вид:

$$Ax + C = 0.$$

В таком случае, решая это уравнение относительно x, получим:

$$x = -\frac{C}{A},$$

или, вводя обозначение $-\frac{C}{A} = a$,

$$x = a. \qquad (2)$$

Но мы уже видели ранее (§ 1), что уравнение (2) является уравнением прямой линии, параллельной оси Oy.

Таким образом, вопрос, поставленный в начале этого параграфа, решён: мы показали, что *всякое уравнение первой степени относительно текущих координат определяет прямую линию.* В соответствии с этим уравнение (5) называется *общим уравнением прямой.*

Подводя итог изложенному в §§ 1 и 2 этой главы, мы можем сказать, что прямая линия, и только она, может быть представлена в декартовой системе координат уравнением первой степени относительно текущих координат x и y.

Замечание. Для приведения уравнения первой степени к виду (1) нужно решить его относительно y. Тогда коэффициент при x в таком уравнении будет угловым коэффициентом прямой, а свободный член будет давать величину отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат. Этот вид уравнения прямой особенно важен. Из изложенного следует, что графиком линейной функции от x, т. е. многочлена первой степени относительно x, является прямая линия, и обратно, если графиком некоторой функции от x является прямая линия, то эта функция может быть записана в виде многочлена первой степени от x. Отсюда происходит название: линейная функция («прямолинейная»).

Пример. Написать уравнение с угловым коэффициентом для прямой линии, заданной уравнением $2x + 3y + 7 = 0$.

Разрешив данное уравнение относительно y, получим:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Отсюда следует, что угловой коэффициент прямой $k = -\frac{2}{3}$, а величина отрезка, отсекаемого ею на оси ординат, $b = -\frac{7}{3}$.

§ 4. Исследование общего уравнения первой степени $Ax + By + C = 0$. Как мы видели, общее уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0. \qquad (5)$$

определяет прямую линию. Посмотрим, какое положение занимает эта прямая линия по отношению к координатным осям, когда один или два коэффициента уравнения (5) обращаются в нуль.

1. $C = 0$. В этом случае уравнение (5) имеет вид:

$$Ax + By = 0$$

и определяет прямую, проходящую через начало координат, так как это уравнение удовлетворяется при $x=y=0$.

2. $A=0$. Уравнение (5) имеет вид:

$$By+C=0,$$

или

$$y=b,$$

где обозначено

$$b=-\frac{C}{B}.$$

Для всех точек такой прямой линии ордината y имеет постоянное значение, т. е. прямая линия расположена параллельно оси Ox на расстоянии от неё, равном $|b|$ (выше оси Ox, если b — число положительное, и ниже оси, если b — число отрицательное).

3. $B=0$. В этом случае уравнение (5) принимает вид:

$$Ax+C=0$$

или $\left(\text{обозначая } -\frac{C}{A}=a\right)$

$$x=a,$$

и определяет прямую, параллельную оси Oy.

4. $C=0$, $B=0$. Уравнение (5) принимает вид:

$$Ax=0$$

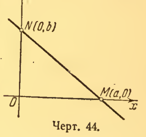
или

$$x=0.$$

Прямая совпадает с осью Oy.

5. $C=0$, $A=0$. Уравнение (5) приводится к виду $y=0$. Прямая совпадает с осью Ox.

§ 5. Уравнение прямой линии в отрезках. Мы уже говорили о том, что положение прямой линии по отношению к координатным осям можно определять различными способами. В зависимости от способа задания прямой мы будем получать различные формы её уравнения.



Черт. 44.

Рассмотрим прямую линию, пересекающую обе координатные оси и не проходящую через начало координат. Положение прямой можно определить, указав величины a и b отрезков, отсекаемых прямой соответственно на осях Ox и Oy (на черт. 44 $a=\text{вел}\,\overline{OM}$, $b=\text{вел}\,\overline{ON}$).

Найдём уравнение этой прямой. Уравнение такой прямой можно записать в виде

$$Ax+By+C=0, \tag{5}$$

где ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Остаётся найти коэффициенты уравнения (выразить их через параметры a и b).

Так как точка $M(a, 0)$ лежит на данной прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению (5):

$$Aa + C = 0,$$

откуда

$$A = -\frac{C}{a}. \tag{6}$$

Аналогично и координаты точки $N(0, b)$ должны удовлетворять уравнению (5), что даёт

$$Bb + C = 0,$$

или

$$B = -\frac{C}{b}. \tag{7}$$

Подставляя значения A и B из равенств (6) и (7) в уравнение (5) прямой, получим:

$$-C\frac{x}{a} - C\frac{y}{b} + C = 0.$$

Деля обе части равенства на C (по условию $C \neq 0$), найдём:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0,$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{8}$$

Уравнение прямой, записанное в форме (8), носит название *уравнения в отрезках*.

Замечание. Связь между текущими координатами x, y и величинами a и b отрезков, отсекаемых прямой на осях координат, может быть усмотрена непосредственно из черт. 45 при указанном расположении прямой относительно координатных осей. Действительно, из подобия треугольников APM и AOB получаем:

$$\frac{PM}{OB} = \frac{PA}{OA}$$

или

$$\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}.$$

Черт. 45.

Последнее же равенство переписывается так:

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a},$$

откуда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Пример. Уравнение прямой $2x-3y+2=0$ написать в отрезках.

Так как точка $(a, 0)$ лежит на данной прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой. Следовательно,

$$2a+2=0, \text{ откуда } a=-1.$$

Аналогично, подставляя координаты точки $(0, b)$ в уравнение прямой, найдём:

$$-3b+2=0 \text{ или } b=\frac{2}{3}.$$

Отсюда следует, что уравнение прямой в отрезках будет

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1. \qquad (8')$$

Уравнение (8') можно получить и путём формальных преобразований данного уравнения. Действительно, перенося свободный член данного уравнения в правую часть равенства, получим:

$$2x-3y=-2.$$

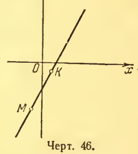
Деля обе части равенства на -2, будем иметь:

$$-\frac{2x}{2}+\frac{3y}{2}=1.$$

Переписывая это уравнение в форме (8), получим окончательно:

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1.$$

§ 6. Построение прямой линии по её уравнению. Чтобы построить прямую линию, достаточно нанести на чертёж две какие-нибудь её точки. Для отыскания координат какой-либо точки, лежащей на прямой, выбираем произвольно значение одной из координат и по уравнению прямой находим соответствующее значение второй координаты.



Черт. 46.

Пример 1. Построить прямую, заданную уравнением

$$2x-y-3=0.$$

Положим, например, $x=1$; тогда $2-y-3=0$, или $y=-1$. Следовательно, точка $K(1, -1)$ лежит на прямой. Аналогично, полагая, например, $x=-1$, найдём точку $M(-1, -5)$, также лежащую на прямой. Двумя найденными точками определяется прямая (черт. 46).

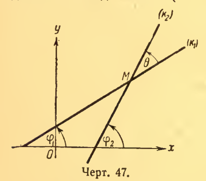
Пример 2. Построить прямую $2x+3y=0$.

Так как в уравнении $2x+3y=0$ отсутствует свободный член, то прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат. Чтобы найти точку прямой, отличную от начала, положим x равным, например, 1; тогда $2+3y=0$, или $y=-\frac{2}{3}$.

Следовательно, точка $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ лежит на прямой. Остаётся провести прямую через эту точку и начало координат.

Замечание. Практически при построении прямой удобно использовать уравнение в отрезках, или найти точки пересечения прямой с осями координат.

§ 7. Угол между двумя прямыми. Пусть даны две прямые (I) и (II). Углом между прямыми (I) и (II), рассматриваемыми в указанном порядке, будем называть тот угол, на который нужно повернуть прямую (I), чтобы она совпала с (II) (или стала ей параллельна). Знак угла устанавливается по обычному правилу. Так как при добавочном повороте на угол π прямая снова займёт начальное положение, то ясно, что угол между прямыми (I) и (II) определяется не однозначно (с точностью до слагаемого, кратного π). Одно из значений угла можно всегда выбрать так, чтобы оно было неотрицательным и меньшим π. Практически это значение угла обычно и рассматривается.



Черт. 47.

Пусть прямые (I) и (II) заданы уравнениями

$$y = k_1x + b_1 \qquad \text{(I)}$$

и

$$y = k_2x + b_2. \qquad \text{(II)}$$

Обозначим через φ_1 угол наклона прямой (I) к оси Ox и через θ угол, на который нужно повернуть прямую (I) до совпадения с (II) (черт. 47). Тогда

$$\varphi_1 + \theta + \varphi_2$$

будет, очевидно, углом наклона прямой (II) к оси Ox. Отсюда

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1,$$

и если прямые (I) и (II) не являются перпендикулярными, то (по известной формуле тригонометрии)

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Заметив, что $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, получим:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \qquad (9)$$

Замечание 1. Формула (9) определяет тангенс угла, образованного вращением вокруг точки M прямой с угловым коэффициентом k_1 до совмещения её с прямой, имеющей угловой коэффициент k_2. Это можно запомнить, записывая формулу так:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\overleftarrow{k_2 - k_1}}{1 + k_1k_2}.$$

Замечание 2. Если речь идёт об угле между двумя прямыми и не указан порядок, в котором они рассматриваются, то можно устанавливать этот порядок произвольно. Очевидно, изменение порядка повлечёт за собой изменение знака для тангенса угла.

Замечание 3. Если хотя бы одна из данных прямых параллельна оси Oy, то формула (9) не имеет смысла. В этом случае угол между прямыми вычисляется непосредственно по формуле

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Пример. Найти угол между прямыми $y = 2x - 3$ и $3x + y - 2 = 0$. Если перенумеровать прямые в том порядке, как они заданы, то угловой коэффициент прямой (I) будет $k_1 = 2$, а для прямой (II) будет $k_2 = -3$. Тогда по формуле (9) получим $\operatorname{tg} \theta = \frac{-3-2}{1-2\cdot 3} = 1$, откуда $\theta = 45°$.

§ 8. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Прямые параллельны в том и только в том случае, если равны тангенсы углов наклона их к оси Ox, т. е.

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2,$$

или

$$k_1 = k_2. \qquad (10)$$

Итак, *условие* (необходимое и достаточное) *параллельности прямых заключается в равенстве их угловых коэффициентов.*

Условие параллельности двух прямых можно получить и непосредственно из формулы (9).

В случае перпендикулярности прямых (и только в этом случае) можно считать, что

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \varphi_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = -1,$$

или окончательно

$$k_1 k_2 = -1. \qquad (11)$$

Таким образом, *условие* (необходимое и достаточное) *перпендикулярности прямых заключается в том, что произведение их угловых коэффициентов равно* -1.

Пример 1. Прямые $2x - 3y + 1 = 0$ и $4x - 6y - 5 = 0$ параллельны.

В самом деле, угловые коэффициенты этих прямых суть $k_1 = \frac{2}{3}$, $k_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, т. е. условие параллельности выполнено.

Пример 2. При каком значении k уравнение $y=kx+1$ определяет прямую, перпендикулярную к прямой $y=2x-1$?

Угловой коэффициент второй прямой $k_2=2$. Условие перпендикулярности даёт $2k=-1$, откуда $k=-\frac{1}{2}$.

§ 9. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Пусть даны точка $A(x_1, y_1)$ и угловой коэффициент k, определяющий направление прямой линии, проходящей через точку A. Уравнение этой прямой будем искать в виде

$$y=kx+b, \tag{12}$$

где неизвестное b должно быть определено из условия прохождения прямой через точку $A(x_1, y_1)$. Так как точка $A(x_1, y_1)$ лежит на данной прямой, то координаты её должны удовлетворять уравнению (12). Подставляя в уравнение (12) вместо текущих координат координаты x_1, y_1, получим:

$$y_1=kx_1+b. \tag{13}$$

Из условия (13) нужно определить b и подставить найденное значение в уравнение (12). Другими словами, нужно исключить b из уравнения (12) и равенства (13), что мы сделаем, вычитая (13) из (12); таким образом, получим уравнение прямой линии, проходящей через точку (x_1, y_1) и имеющей направление, определяемое угловым коэффициентом k:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{14}$$

Ясно, что в форме (14) может быть записано уравнение всякой прямой, не параллельной оси Oy. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ параллельно оси Oy, будет иметь вид (гл. III, § 2):

$$x=x_1.$$

Замечание 1. Связь между текущими координатами x, y и параметрами k, x_1, y_1, выражаемая уравнением (14), может быть усмотрена непосредственно из черт. 48 при указанном расположении прямой относительно координатных осей.

Черт. 48.

В самом деле, обозначая через M переменную точку прямой с координатами x и y, из треугольника ABM имеем:

$$BM=AB\operatorname{tg}\varphi. \tag{14'}$$

Замечая, что

$$BM=PM-RA=y-y_1,$$
$$AB=RP=OP-OR=x-x_1$$

и $\operatorname{tg}\varphi=k$, получим, подставляя эти значения в равенство (14'), вышенаписанное уравнение (14).

Замечание 2. Совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку плоскости, называется *пучком прямых*, а общая их точка — *центром пучка*.

Если в уравнении (14) под k будем понимать величину, принимающую всевозможные числовые значения, то это уравнение будет определять совокупность прямых, проходящих через точку $A(x_1, y_1)$, т. е. пучок прямых с центром в точке $A(x_1, y_1)$ [в форме (14) можно записать уравнение любой из прямых пучка, кроме одной — параллельной оси Oy].

Пример 1. Составить уравнеиие прямой, проходящей через точку $(-3, 4)$ и иаклоиёииой к оси Ox под углом в 135°.

Уравиеиие прямой можно записать в форме (14). Здесь $x_1 = -3$, $y_1 = 4$, $k = \operatorname{tg} 135° = -1$.

Следовательно, искомое уравиеиие будет

$$y - 4 = -1(x + 3),$$

или

$$x + y - 1 = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение прямой лииии, проходящей через точку (1, 2) параллельио прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

Угловой коэффициент k прямой линии, для которой иужио составить уравиение, раеи угловому коэффициеиту $k_1 = \frac{2}{3}$ даиной прямой в силу условия параллельиости этих прямых. Таким образом, полагая в уравнении (14) $k = \frac{2}{3}$, $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, получим уравнение искомой прямой:

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1),$$

или, умиожая на 3,

$$3y - 6 = 2(x - 1), \text{ или } 3y - 6 = 2x - 2$$

откуда окончательно находим:

$$2x - 3y + 4 = 0.$$

Пример 3. Составить уравнение прямой лииии, проходящей через точку $(-1, 1)$ перпеидикулярно к прямой $3x - y + 2 = 0$.

Искомый угловой коэффициеит обозначим через k_1, угловой коэффициеит даииой прямой k_2, как видно из её уравнения, равен 3. Условие перпендикулярности $k_2 k_1 = -1$ нам даёт:

$$3k_1 = -1, \text{ откуда } k_1 = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом, искомое уравнение

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1), \text{ или } 3y - 3 = -x - 1,$$

и окончательно

$$x + 3y - 2 = 0.$$

Пример 4. Написать уравнеиие прямой, проходящей через точку $(2, -1)$ и составляющей угол в 45° с прямой $5x - 2y + 3 = 0$.

Угловой коэффициент прямой, для которой требуется составить уравнение, будем искать по формуле (9) (§ 7).

Так как в условии задачи не сказано, от какой из прямых следует вести отсчёт угла, то поставленная задача имеет два решения.

Для получения одного из них в формуле (9) будем считать $k_1 = \frac{5}{2}$ (угловой коэффициент данной прямой), $\theta = 45°$, k_2 — искомый угловой коэффициент. Тогда будем иметь:

$$1 = \frac{k_2 - \frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2}k_2},$$

откуда $k_2 = -\frac{7}{3}$ и искомое уравнение

$$y + 1 = -\frac{7}{3}(x - 2),$$

или (после упрощений)

$$7x + 3y - 11 = 0.$$

Другое решение мы получим, положив в формуле (9) $k_2 = \frac{5}{2}$, $\theta = 45°$ и находя k_1. Будем иметь $k_1 = \frac{3}{7}$; искомое уравнение

$$y + 1 = \frac{3}{7}(x - 2),$$

или

$$3x - 7y - 13 = 0.$$

§ 10. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Если две прямые лежат на плоскости, то возможны три различных случая взаимного расположения их: 1) прямые пересекаются (т. е. имеют одну общую точку), 2) прямые параллельны и не совпадают, 3) прямые совпадают.

Выясним, как узнать, какой из этих случаев имеет место, если прямые заданы своими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Если прямые пересекаются, т. е. имеют одну общую точку, то координаты этой точки должны удовлетворять обоим уравнениям (15). Следовательно, для нахождения координат точки пересечения прямых нужно решить совместно их уравнения. С этой целью исключим сначала неизвестное x, для чего умножим первое уравнение на A_2, а второе на A_1 и вычтем первое из второго. Будем иметь:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y + C_2A_1 - C_1A_2 = 0. \tag{15'}$$

Чтобы исключить из уравнений (15) неизвестное y, умножим первое из них на B_2, а второе на B_1 и вычтем второе из первого. Получим:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + C_1B_2 - C_2B_1 = 0. \tag{15''}$$

Если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то из уравнений (15′) и (15″) получим решение системы (15):

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (16)$$

Формулы (16) дают координаты x, y точки пересечения двух прямых.

Таким образом, *если* $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, *то прямые пересекаются.*

Если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то формулы (16) не имеют смысла. Как в этом случае располагаются прямые? Легко видеть, что в этом случае прямые параллельны. Действительно, из условия $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ следует, что $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$, т. е. $k_1 = k_2$ (если же $B_1 = B_2 = 0$, то прямые параллельны оси Oy и, следовательно, параллельны между собой).

Итак, если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то прямые параллельны. Рассматриваемое условие можно записать в виде $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Тогда можно сказать, что *если в уравнениях прямых соответствующие коэффициенты при текущих координатах пропорциональны, то прямые параллельны.*

В частности, параллельные прямые могут совпадать. Выясним, каков аналитический признак совпадения прямых. Для этого рассмотрим уравнения (15′) и (15″). Если свободные члены этих уравнений будут оба равны нулю, т. е. $C_2A_1 - C_1A_2 = 0$ и $C_1B_2 - C_2B_1 = 0$, то

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

т. е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений (15) пропорциональны. В таком случае одно из уравнений системы получается из другого умножением всех его членов на некоторый общий множитель, т. е. уравнения (15) равносильны. Следовательно, рассматриваемые параллельные прямые совпадают.

Если же хотя бы один из свободных членов уравнений (15′) и (15″) будет отличен от нуля (или $C_2A_1 - C_1A_2 \neq 0$, или $C_1B_2 - C_2B_1 \neq 0$), т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

то уравнения (15′) и (15″), а значит и уравнения (15), не будут иметь решений (по крайней мере одно из равенств (15′) или (15″) будет невозможным). В этом случае параллельные прямые не будут совпадать.

Итак, *условием* (необходимым и достаточным) *совпадения двух прямых является пропорциональность соответствующих коэффициентов их уравнений:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Пример 1. Определить точку пересечения прямых линий

$$2x-3y-1=0 \text{ и } 3x-y-2=0.$$

Решая уравнения совместно, умножим второе на 3:

$$2x-3y-1=0,\ 9x-3y-6=0.$$

Вычитая, получим: $7x-5=0$, откуда $x=\frac{5}{7}$. Умножая первое уравнение на 3, второе на 2 и вычитая первое из второго, получим: $7y-1=0$, откуда $y=\frac{1}{7}$. Итак, координаты точки пересечения двух данных прямых суть:

$$x=\frac{5}{7}, \quad y=\frac{1}{7}.$$

Пример 2. Прямые линии

$$2x-y+2=0 \text{ и } 4x-2y-1=0$$

параллельны (они не имеют общей точки), так как

$$\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{-1}.$$

Прямые

$$3x+y-2=0 \quad \text{и} \quad 6x+2y-4=0$$

совпадают, так как

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}.$$

§ 11. Уравнение пучка прямых. В § 9 (замечание 2) рассматривалось уравнение пучка прямых с центром в заданной точке $A(x_1, y_1)$. Иногда центр пучка прямых не задаётся непосредственно, а определяется парой прямых, принадлежащих пучку. Тогда координаты центра пучка можно найти, решая совместно уравнения данных прямых. Однако вычисления координат центра пучка можно избежать, если воспользоваться другой формой уравнения пучка прямых.

Пусть прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2=0$$

пересекаются в некоторой точке (x_1, y_1). Составим уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{17}$$

где λ — произвольный параметр.

При любом значении λ уравнение (17) определяет прямую линию, так как оно является уравнением первой степени относительно переменных x и y. Легко показать, что эта прямая проходит через точку (x_1, y_1). Действительно, так как точка (x_1, y_1) принадлежит каждой из заданных прямых, то

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1=0 \text{ и } A_2x_1+B_2y_1+C_2=0, \text{ откуда}$$
$$A_1x_1+B_1y_1+C_1+\lambda(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0.$$

Следовательно, координаты точки пересечения двух данных прямых удовлетворяют уравнению (17).

Таким образом, уравнение (17) при различных значениях λ определяет прямые, принадлежащие пучку с центром в точке (x_1, y_1).

Остаётся выяснить, можно ли из (17) при надлежащем выборе λ получить уравнение любой из прямых пучка.

Пусть (α, β) — произвольная точка плоскости, отличная от (x_1, y_1). Прямая, определяемая уравнением (17), пройдёт через эту точку, если координаты её будут удовлетворять уравнению (17), т. е. если

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1 + \lambda(A_2\alpha + B_2\beta + C_2) = 0.$$

Отсюда следует, что при

$$\lambda = -\frac{A_1\alpha + A_1\beta + C_1}{A_2\alpha + B_2\beta + C_2}$$

мы получим из (17) уравнение прямой, проходящей через произвольно выбраииую точку плоскости.

Параметр λ нельзя подобрать только в том случае, если точка (α, β) будет лежать на прямой $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (тогда формула, определяющая λ, не будет иметь смысла). Следовательно, уравнение (17) при различных значеииях λ будет определять все прямые пучка, кроме одной (второй из двух данных). Уравнение этой последней прямой, очевидно, может быть получено из уравнения

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1) + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

при $\mu = 0$.

Уравнение вида (17) называют *уравнением пучка прямых.*

Пример. Составить уравнение прямой лииии, проходящей через точку пересечения прямых

$$2x - 3y - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 3x - y - 2 = 0$$

перпендикулярио к прямой $y = x$.

Первый способ. Решая уравнеиия $2x - 3y - 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ совместно, иаходим координаты точки пересечеиия прямых:

$$x = \frac{5}{7}, \quad y = \frac{1}{7}$$

(см. пример 1, § 10).

Из условия перпеидикулярности прямых угловой коэффициеит иужиой иам прямой $k = -1$. Следовательио, искомое уравнение будет

$$y - \frac{1}{7} = -1\left(x - \frac{5}{7}\right), \quad \text{или} \quad y - \frac{1}{7} = -x + \frac{5}{7},$$

$$\text{или } 7y - 1 = -7x + 5,$$

откуда

$$7x + 7y - 6 = 0.$$

Второй способ. Искомое уравиеиие можио записать в виде:

$$2x - 3y - 1 + \lambda(3x - y - 2) = 0 \qquad (17')$$

или

$$(2 + 3\lambda)x + (-3 - \lambda)y - 1 - 2\lambda = 0.$$

Угловой коэффициеит прямой линии, определяемой последним уравнением, будет

$$k = \frac{2 + 3\lambda}{3 + \lambda}.$$

Чтобы прямая, уравнение которой нужно найти, была перпендикулярна к прямой $y=x$, нужно положить $k=-1$.

Тогда будем иметь:

$$\frac{2+3\lambda}{3+\lambda}=-1,$$

откуда

$$2+3\lambda=-3-\lambda,$$

или

$$4\lambda=-5 \quad \text{и} \quad \lambda=-\frac{5}{4}.$$

Подставляя найденное значение λ в уравнение (17′), получим после упрощений искомое уравнение:

$$7x+7y-6=0.$$

§ 12. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Уравнение пучка прямых линий, проходящих через точку $A(x_1, y_1)$, имеет вид:

$$y-y_1=k(x-x_1), \tag{18}$$

где k есть произвольный параметр. Чтобы выделить из этого пучка прямую линию, проходящую через точку $B(x_2, y_2)$, потребуем, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению (18):

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1). \tag{19}$$

Из равенства (19) нужно определить значение параметра k и внести это значение в уравнение (18). Иначе говоря, нужно исключить k из уравнения (18) и равенства (19), что мы сделаем, деля (18) на (19).

Таким образом получим уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{20}$$

Если данные точки A и B лежат на прямой, параллельной оси Ox $(y_2-y_1=0)$ или оси Oy $(x_2-x_1=0)$, то уравнение прямой будет соответственно иметь вид $y=y_1$ или $x=x_1$.

Черт. 49.

Замечание 1. Из соотношения (19) мы находим формулу

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \tag{19′}$$

выражающую угловой коэффициент прямой линии через координаты двух её точек.

Замечание 2. Зависимость между текущими координатами и данными величинами, выражаемая уравнением (20), может быть усмотрена непосредственно из черт. 49 при указанном расположении прямой относительно координатных осей.

В самом деле, обозначая через M переменную точку прямой с координатами x, y, из подобия треугольников AMD и ABC находим:

$$\frac{DM}{CB}=\frac{AD}{AC}.$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} DM &= PM - LA = y - y_1, \\ AD &= LP = OP - OL = x - x_1, \\ CB &= NB - LA = y_2 - y_1, \\ AC &= LN = ON - OL = x_2 - x_1, \end{aligned}$$

мы придадим пропорции вид (20).

Пример 1. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(-1, 1)$.

Подставляя в уравнение (20) $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=-1$, $y_2=1$, получим: $\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-1}{-1-1}$, откуда $\frac{y-2}{1}=\frac{x-1}{2}$, или $2y-4=x-1$, или окончательно

$$x-2y+3=0.$$

Пример 2. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точку пересечения прямых $x+y-1=0$, $x-y+2=0$ и через точку $(2, 1)$.

Первый способ. Находим координаты точки пересечения двух данных прямых линий. Для этого решаем данные уравнения совместно. Складывая, находим:

$$2x+1=0, \quad \text{откуда} \quad x=-\frac{1}{2}.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$2y-3=0, \quad \text{откуда} \quad y=\frac{3}{2}.$$

Далее, остаётся составить уравнение прямой линии по двум точкам $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ и $(2, 1)$. Искомое уравнение будет

$$\frac{y-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}, \quad \text{или} \quad \frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}, \quad \text{или} \quad \frac{y-\frac{3}{2}}{-1}=\frac{x+\frac{1}{2}}{5},$$

откуда

$$5y-\frac{15}{2}=-x-\frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad x+5y-7=0.$$

Второй способ. Составим уравнение пучка прямых линий с центром в точке пересечения двух данных прямых:

$$x+y-1+\lambda(x-y+2)=0. \qquad (17'')$$

Чтобы выделить из этого пучка прямую линию, проходящую через точку $(2, 1)$, потребуем, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению $(17'')$:

$$2+1-1+\lambda(2-1+2)=0;$$

отсюда найдём параметр λ:

$$2+3\lambda=0, \quad \text{или} \quad \lambda=-\frac{2}{3}.$$

Подставляя $\lambda = -\frac{2}{3}$ в уравнение (17''), найдем:

$$x + y - 1 - \frac{2}{3}(x - y + 2) = 0,$$

или

$$3x + 3y - 3 - 2x + 2y - 4 = 0,$$

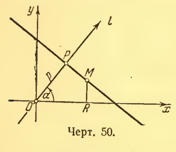
откуда

$$x + 5y - 7 = 0.$$

§ 13. Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой. Пусть даны три точки: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Уравнение прямой линии, проходящей через точки A и B, запишем в форме (20). Точка C лежит на этой прямой в том и только в том случае, когда её координаты x_3, y_3 удовлетворяют уравнению этой прямой. Таким образом, искомым условием будет:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{21}$$

§ 14. Нормальное уравнение прямой линии. Пусть на плоскости дана какая-нибудь прямая линия. Проведём через начало координат прямую l перпендикулярно к данной; выберем на ней положительное направление от начала координат в сторону данной прямой (если данная прямая проходит через начало координат, то положительное направление на прямой l можно выбрать произвольно). Положение данной прямой относительно осей координат можно охарактеризовать, указав её расстояние p от начала координат и угол α между осью Ox и осью l (черт. 50). Составим уравнение этой прямой.



Черт. 50.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка прямой. Построим координатные отрезки точки M, рассмотрим направленную ломаную $\overline{ORMP}$ и возьмём её проекцию на ось l. Так как проекция ломаной линии на ось равна проекции её замыкающего отрезка (гл. I, § 8), то

$$\text{пр}\,\overline{ORMP} = \text{пр}\,\overline{OP}. \tag{22}$$

С другой стороны, проекция ломаной линии равна сумме проекций её звеньев (гл. I, § 8), т. е.

$$\text{пр}\,\overline{ORMP} = \text{пр}\,\overline{OR} + \text{пр}\,\overline{RM} + \text{пр}\,\overline{MP}. \tag{22'}$$

Сравнивая (22) и (22'), получим:

$$\text{пр}\,\overline{OR} + \text{пр}\,\overline{RM} + \text{пр}\,\overline{MP} = \text{пр}\,\overline{OP}. \tag{22''}$$

Так как проекция направленного отрезка на ось равна его величине, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью, на которой расположен отрезок (гл. I, § 8), то

$$\text{пр}\,\overline{OR} = x\cos(-\alpha) = x\cos\alpha,$$
$$\text{пр}\,\overline{RM} = y\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = y\sin\alpha,$$
$$\text{пр}\,\overline{OP} = p.$$

Учитывая, кроме того, что

$$\text{пр}\,\overline{MP} = 0,$$

и подставляя найденные значения в равенство (22''), получим:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,$$

или

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{23}$$

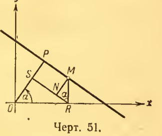
Этому уравнению удовлетворяют координаты x, y любой точки рассматриваемой прямой линии. Если же точка не лежит на данной прямой, то её координаты этому уравнению удовлетворять не будут, так как в этом случае проекция соответствующей ломаной на ось l не будет равна p. Следовательно, уравнение (23) является уравнением данной прямой.

Уравнение вида (23) называется *нормальным уравнением прямой*.

Заметим, что нормальное уравнение прямой характеризуется двумя особенностями: 1) свободный член его $-p \leqslant 0$, 2) сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Как бы ни располагалась прямая относительно координатных осей, её уравнение всегда можно записать в нормальном виде.



Черт. 51.

Замечание. Зависимость между текущими координатами x, y и постоянными α и p, выражаемая нормальным уравнением (23), может быть усмотрена непосредственно из черт. 51 при указанном расположении прямой относительно координатных осей. В самом деле,

$$OS + SP = OP.$$

Из прямоугольного треугольника OSR имеем:

$$OS = OR\cos\alpha = x\cos\alpha.$$

С другой стороны, $SP = NM$ определяем из прямоугольного треугольника MNR:

$$SP = NM = RM\sin\alpha = y\sin\alpha.$$

Внося значения OS, SP и $OP=p$ в первое равенство, перепишем его так:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$$

§ 15. Приведение общего уравнения первой степени к нормальному виду. Пусть дано общее уравнение первой степени:

$$Ax+By+C=0. \tag{24}$$

Покажем, что такое уравнение можно привести к нормальному виду. С этой целью помножим обе части уравнения на постоянный множитель M, подобрав его так, чтобы получилось уравнение вида (23). Уравнение (24) преобразуется к виду:

$$MAx+MBy+MC=0. \tag{24'}$$

Чтобы уравнение (24′) было вида, одинакового с уравнением (23), нужно положить:

$$MA=\cos\alpha,\quad MB=\sin\alpha,\quad MC=-p. \tag{25}$$

Из равенств (25) легко найдём неизвестные M, α и p выраженными через известные коэффициенты A, B, C. В самом деле, возводя первые два из равенств (25) в квадрат и складывая, получим:

$$M^2A^2+M^2B^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,$$

или

$$M^2(A^2+B^2)=1,$$

откуда

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{26}$$

В формуле (26) нужно брать знак, противоположный знаку свободного члена C, как это видно из последнего равенства (25). При $C=0$ знак можно выбрать произвольно.

Подставляя найденное значение M в равенства (25), получим формулы для $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\qquad \sin\alpha&=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\\ p&=\frac{C}{\mp\sqrt{A^2+B^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{25'}$$

Итак, уравнение (24) приводится к нормальному виду путём умножения его на множитель M, определяемый по формуле (26). Этот множитель M носит название *нормирующего множителя*.

Пример. Уравнение прямой линии $3x-4y-5=0$ привести к нормальному виду.

Нормирующий множитель равен: $M = +\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$. Умножая на него данное уравнение, получим:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0.$$

Для данной прямой, следовательно, имеем: $p = 1$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

§ 16. Расстояние от данной точки до данной прямой. Условимся называть отклонением данной точки от данной прямой число d, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, взятой со знаком плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от данной прямой, и со знаком минус, если они лежат по одну сторону от прямой. Для точек, лежащих на прямой, отклонение равно нулю[1]).

Пусть даны прямая линия уравнением в нормальном виде

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (27)$$

и точка $A(x_1, y_1)$. Найдём отклонение d точки A от данной прямой.

Черт. 52.

Рассмотрим ломаную линию $\overline{ORAKP}$ (черт. 52) и возьмём её проекцию на ось l. Так как проекция ломаной линии равна проекции замыкающего отрезка (гл. I, § 8), то

$$\text{пр}\,\overline{ORAKP} = \text{пр}\,\overline{OP} = p. \qquad (28)$$

С другой стороны, проекция ломаной линии равна сумме проекций её звеньев (гл. I, § 8), т. е.

$$\text{пр}\,\overline{ORAKP} = \text{пр}\,\overline{OR} + \text{пр}\,\overline{RA} + \text{пр}\,\overline{AK} + \text{пр}\,\overline{KP}.$$

Следовательно, равенство (28) перепишется в виде:

$$\text{пр}\,\overline{OR} + \text{пр}\,\overline{RA} + \text{пр}\,\overline{AK} + \text{пр}\,\overline{KP} = p. \qquad (28')$$

Так как проекция направленного отрезка равна его величине, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью, на которой лежит отрезок (гл. I, § 8), то

$$\text{пр}\,\overline{OR} = x_1\cos(-\alpha) = x_1\cos\alpha,$$
$$\text{пр}\,\overline{RA} = y_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y_1\sin\alpha.$$

Учитывая, кроме того, что

$$\text{пр}\,\overline{AK} = -d, \quad \text{пр}\,\overline{KP} = 0, \quad \text{пр}\,\overline{OP} = p$$

[1]) Термин «отклонение» точки от прямой заимствован из книги Н. В. Ефимова «Краткий курс аналитической геометрии».

и подставляя найденные значения в равенство (28′), будем иметь:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - d = p,$$

откуда

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p. \qquad (29)$$

Следовательно, *чтобы получить отклонение точки* $A(x_1, y_1)$ *от данной прямой, нужно в левую часть нормального уравнения этой прямой подставить вместо текущих координат координаты данной точки* x_1 *и* y_1.

Очевидно, *расстояние точки от прямой есть абсолютная величина отклонения* и вычисляется по формуле

$$|d| = |x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p|. \qquad (29')$$

Пример. Найти расстояние от точки $(-1, 1)$ до прямой $3x - 4y + 10 = 0$.

Приводим данное уравнение к нормальному виду, умножая его на нормирующий множитель $M = -\frac{1}{\sqrt{9+16}} = -\frac{1}{5}$. Получим нормальное уравнение прямой:

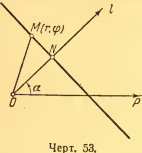
$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

Отклонение равно:

$$d = -\frac{3}{5}\cdot(-1) + \frac{4}{5}\cdot 1 - 2 = \frac{7}{5} - 2 = -\frac{3}{5}.$$

Отрицательный знак для d указывает на то, что данная точка лежит от прямой с той же стороны, что и начало координат. Искомое расстояние $|d| = \frac{3}{5}$.

§ 17. Уравнение прямой в полярной системе координат. Положение прямой линии на плоскости будет вполне определено, если задать её расстояние p от полюса O и угол α между полярной осью и осью l, проходящей через полюс перпендикулярно к прямой (черт. 53). Положительным направлением оси l будем считать направление от полюса к данной прямой (если прямая проходит через полюс, то положительное направление оси l может быть выбрано произвольно).



Черт. 53.

Очевидно, все точки данной прямой линии, и только они, обладают следующим свойством: проекция на ось l отрезка $\overline{OM}$, проведённого из полюса O в точку M прямой линии, равна p. Обозначая через r и φ координаты произвольной точки прямой линии, указанное свойство мы можем записать в виде

$$r\cos(\varphi - \alpha) = p.$$

Это и есть уравнение прямой линии в полярных координатах.

Упражнения

1. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок, величина которого равна 5, и наклонённой к оси Ox под углом: а) 45°; б) 60°; в) 135°; г) 180°.

2. Написать уравнение прямой, наклонённой к оси Ox под углом в 30° и отсекающей на оси Oy отрезок, величина которого равна — 3.

3. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и наклонённой к оси Ox под углом: а) 45°; б) 135°; в) 180°.

4. Привести к виду уравнений с угловым коэффициентом уравнения прямых:

$$\text{а) } x - y - 1 = 0; \quad \text{б) } 4x - 2y + 3 = 0; \quad \text{в) } 3x + 2y - 5 = 0;$$
$$\text{г) } 2x + 5y = 0; \quad \text{д) } 3y - 7 = 0.$$

5. Написать уравнение прямой, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, величины которых соответственно равны 3 и — 4.

6. Написать уравнения прямых

$$\text{а) } 3x + 2y - 6 = 0; \quad \text{б) } y = 6x - 3; \quad \text{в) } y = x - 1; \quad \text{г) } 2x - 3y + 7 = 0$$

в форме уравнений в отрезках.

7. Найти угол наклона прямой $x - y - 5 = 0$ к оси Ox.

8. Построить прямые, определяемые уравнениями

$$3x - 5y + 15 = 0, \quad 5x + 3y = 0, \quad 2x + 3 = 0, \quad 3y - 7 = 0.$$

9. Какое расположение относительно осей координат имеют прямые, выражаемые уравнениями

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1, \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1, \quad -\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1, \quad -\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1?$$

10. Диагонали ромба, равные 8 и 6 единицам длины, приняты за оси координат. Найти уравнения сторон этого ромба.

11. Определить площадь треугольника, заключённого между осями координат и прямой $2x + 5y - 20 = 0$.

12. Найти площадь треугольника, ограниченного прямыми

$$y - 2 = 0, \quad 3x - 2y + 4 = 0, \quad x - 2y - 7 = 0.$$

13. Какая зависимость должна быть между коэффициентами a и b, чтобы прямая $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ была наклонена к оси Ox под углом: а) 45°; б) 60°; в) 135°?

14. Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые: а) $x - 2y = 0$; б) $x - 1 = 0$; в) $y + 1 = 0$; г) $x - y = 0$; д) $x + y = 0$; е) $5x = 0$; ж) $3y = 0$; з) $3x + 2y - 6 = 0$. Построить эти прямые.

15. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (2, 3) и наклонённой к оси абсцисс под углом в 45°.

16. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (2, — 3) параллельно прямой, соединяющей точки (1, 2) и (— 1, — 5).

17. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1, 2) и перпендикулярной к прямой, соединяющей точки (4, 3) и (— 2, 1).

18. Даны вершины четырёхугольника $ABCD$: $A(2, 2)$, $B(5, 1)$, $C(3, 6)$, $D(0, 3)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

19. Вычислить угол между прямыми:

а) $y=\frac{1}{2}x+2$, $y=3x-7$; б) $y=3x-4$, $y=3x+5$;

в) $y=3x-1$, $y=-\frac{1}{3}x+4$; г) $2x+3y-1=0$, $4x+6y+2=0$;

д) $\sqrt{3}x-y-1=0$, $\sqrt{3}x-3y+6=0$; е) $\frac{y}{12}-\frac{x}{3}=1$, $\frac{x}{25}-\frac{y}{15}=1$;

ж) $2x-y+5=0$, $x+3y-2=0$; з) $4x+3y-1=0$, $x+2y=0$;

и) $x+4y+3=0$, $5y+7=0$.

20. Найти угол между прямыми: $3x-2y+7=0$, $2x+3y-5=0$.

21. Провести через точку (3, 3) прямые, составляющие углы в 45° с прямой $5x-4y-1=0$.

22. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого выражены уравнениями

$$x-y-3=0, \quad x-3y-4=0, \quad 4x+2y+3=0.$$

23. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника с вершинами $A(2, 1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 2)$.

24. Даны две вершины треугольника $A(2, 2)$, $B(3, 0)$ и точка пересечения его медиан $D(3, 1)$. Найти третью вершину C.

25. Найти уравнение прямой, которая проходит через начало координат и а) параллельна прямой $y=2x+3$; б) перпендикулярна к прямой $y=\frac{1}{3}x-1$; в) образует угол в 45° с прямой $y=3x+5$.

26. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку $(-2, 3)$ и а) параллельна оси Ox; б) параллельна биссектрисе I координатного угла; в) параллельна прямой $y=4x-7$; г) образует угол в 60° с прямой $y=2x-1$; д) перпендикулярна к прямой $y=\frac{1}{2}x+8$.

27. Найти уравнения двух перпендикуляров к прямой $y=5x+1$, восставленных в точках пересечения её с осями координат.

28. Провести через точку пересечения прямых $x-y-3=0$, $2x+3y-11=0$ прямую, параллельную прямой $5x-4y-17=0$.

29. Провести через точку пересечения прямых $3x-y-3=0$, $4x+3y-4=0$ прямую, перпендикулярную к первой из них.

30. Провести прямую, соединяющую точку пересечения прямых

$$11x-17y-9=0, \quad 12x+13y-5=0$$

с началом координат.

31. Через точку пересечения прямых $x+y-6=0$, $2x-y-3=0$ провести прямую под углом в 45° к прямой $3x-5=0$.

32. Найти прямую, проходящую через точку $(2, -3)$ и образующую с осью Ox угол, вдвое больший угла, образуемого с той же осью прямою $y=\frac{1}{2}x+3$.

33. Через точку пересечения прямых $x-2y-5=0$ и $2x-3y-8=0$ провести прямую, параллельную прямой $3x-2y+2=0$.

34. Через точку пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $x-4y+5=0$ провести прямую под углом в 45° к прямой $2x-3=0$ (угол отсчитывается от прямой $2x-3=0$).

35. Стороны треугольника выражаются уравнениями

$$x+3y-2=0, \quad 2x+y+5=0, \quad 3x-4=0.$$

Найти уравнения высот этого треугольника.

36. Вершины треугольника суть (0, 5), (1, —2), (—6, 5). Найти уравнения перпендикуляров, восставленных в серединах его сторон, а также точку пересечения этих перпендикуляров.

37. Вершины треугольника суть (0, 1), (1, 0), (1, 1). Найти уравнения медиан.

38. Вершины треугольника суть (2, 1), (0, 7), (—4, —1). Найти уравнения медиан и точку их пересечения.

39*. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку пересечения медиан треугольника, стороны которого выражаются уравнениями $y = 4x + 4$, $y = -x + 4$, $4y = x + 1$.

40. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку пересечения медиан треугольника, стороны которого выражаются уравнениями $x - y - 4 = 0$, $2x - 11y + 37 = 0$, $2x + 7y - 17 = 0$.

41*. На прямой $4x + 3y - 12 = 0$ найти точку, равноудалённую от точек (—1, —2) и (1, 4).

42. На прямой $3x + 2y - 5 = 0$ найти точку, равноудалённую от точек (—1, —1) и (3, 3).

43. Найти точку, равноудалённую от точек (2, 3), (4, 2), (—1, 0).

44. Даны уравнения двух сторон параллелограмма:

$$x + y - 1 = 0, \quad 3x - y + 4 = 0$$

и точка пересечения его диагоналей (3, 3). Найти уравнения двух других сторон.

45. Даны две вершины равностороннего треугольника ABC: $A(2, 1)$ и $B(2, 5)$. Найти третью вершину C.

46. Даны уравнения прямых: а) $4x - 7y + 9 = 0$; б) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y - 3 = 0$; в) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 1$; г) $\frac{1}{3}x + y - 5 = 0$; д) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 5 = 0$. Какие из этих уравнений являются уравнениями в нормальном виде?

47. Найти уравнение прямой по следующим условиям: её расстояние от начала координат равно 7 единицам длины и угол между осью Ox и перпендикуляром к искомой прямой, проведённым из начала координат, равен 120°.

48. Написать уравнение прямой, если известно, что её расстояние от начала координат равно 5 и что перпендикуляр, опущенный на неё из начала координат, составляет с осью Ox угол в 60°.

49. Привести к нормальному виду уравнения следующих прямых:

а) $3x + 4y + 15 = 0$; б) $6x - 8y - 9 = 0$;
в) $2x + 2\sqrt{3}y - 7 = 0$; г) $x + y + 5 = 0$.

50*. Найти длины перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые $15x - 8y - 51 = 0$ и $4x + 3y + 35 = 0$. Найти также координаты оснований этих перпендикуляров.

51. Вершиной треугольника служит точка (5, —3), а основанием — отрезок, соединяющий точки (0, —1) и (3, 3). Найти длину высоты треугольника.

52. На прямой $x + 3y = 0$ найти точку, равноудалённую от начала координат и от прямой $x + 3y - 2 = 0$.

53*. Дана прямая $3x - 4y - 10 = 0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от неё на расстоянии 3 единиц.

54. Дана прямая $5x + 12y + 2 = 0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от неё на расстоянии 3 единиц.

55*. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$3x + 4y - 15 = 0 \quad \text{и} \quad 3x + 4y + 20 = 0.$$

56. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$5x - 12y + 28 = 0 \quad \text{и} \quad 5x - 12y + 15 = 0.$$

57. Даны уравнения оснований трапеции: $2x + y - 5 = 0$, $4x + 2y - 7 = 0$. Найти её высоту.

58*. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(5, 2)$ на расстоянии 4 единиц от точки $(-3, 1)$.

59. Из точки $(1, -2)$ провести касательные к окружности радиуса $\frac{2}{5}\sqrt{85}$, центр которой лежит в точке $(3, 6)$.

60*. Найти биссектрисы углов, образуемых прямыми $3x + 4y - 9 = 0$ и $12x + 9y - 8 = 0$. Проверить, что эти биссектрисы перпендикулярны друг к другу.

61. Найти биссектрисы углов, образуемых прямыми

$$x + 8y - 26 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + 7y + 29 = 0.$$

62. Найти уравнение биссектрисы внешнего угла A треугольника с вершинами $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 7)$.

63. Найти точку, равноудалённую от точек $M(4, -3)$ и $N(2, -1)$ и отстоящую от прямой $4x + 3y - 2 = 0$ на расстоянии, равном 2.

64. Даны центр квадрата $C(-1, 0)$ и уравнение стороны

$$x + 3y - 5 = 0.$$

Составить уравнения остальных трёх сторон.

65. В прямоугольном равнобедренном треугольнике даны уравнение катета $y = 2x$ и середина гипотенузы $K(4, 2)$. Найти уравнения двух других его сторон.

66. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек равна постоянной величине.

67. Основание треугольника неподвижно, а вершина движется по данной прямой. Найти уравнение линии, описываемой центром тяжести этого треугольника.

ГЛАВА IV

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ 1. Предварительные замечания. Общее уравнение второй степени относительно переменных x и y может содержать члены второй степени (x^2, xy и y^2), первой степени (x и y) и нулевой степени (свободный член). В соответствии с этим общее уравнение второй степени можно записать в виде:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Здесь по крайней мере один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля.

Вопрос о том, какие линии будет определять это уравнение при различных значениях его коэффициентов A, B, C, D, E, F, будет решаться в главе VII.

В этой же главе будут рассмотрены некоторые специальные виды уравнения второй степени.

§ 2. Окружность. Мы видели (гл. II, § 1), что окружность с центром в точке $C(a,\ b)$ и радиусом R имеет уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Раскрывая скобки, придадим уравнению (1) вид:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0, \qquad (1')$$

или

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1'')$$

где положено

$$D = -2a,\ E = -2b,\ F = a^2 + b^2 - R^2.$$

Уравнение (1″) является *уравнением второй степени.* Итак, *окружность имеет уравнение второй степени относительно текущих координат.* Но, очевидно, не всякое уравнение второй степени определяет окружность. Действительно, из уравнения **(1″)** усматриваем, что в *уравнении окружности коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат* (xy) *отсутствует.* Обратно, если эти два условия (равенство коэффициентов при x^2 и y^2 и отсутствие члена xy) осуществлены,

то уравнение, вообще говоря, определяет окружность, так как оно приводится к виду (1″) путём деления на коэффициент при x^2 [1]).

Итак, по виду данного уравнения второй степени мы можем решить, является ли оно уравнением окружности или нет. Например, уравнение

$$x^2+y^2-2x+4y-4=0$$

определяет окружность, так как в нём коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а член с произведением координат отсутствует. Желая построить эту окружность, мы должны предварительно определить координаты её центра и радиус. С этой целью данное уравнение мы приведём к виду (1). Такое преобразование есть не что иное, как представление уравнения (1″) в виде (1). Возьмём в данном уравнении члены, содержащие x, т. е. x^2-2x, и представим этот двучлен в виде:

$$x^2-2x=(x-1)^2-1,$$

т. е. выделим из членов, содержащих x, полный квадрат линейного двучлена $(x-1)$.

Далее возьмём члены, содержащие y, т. е. y^2+4y, и, преобразуя этот двучлен таким же образом, получим:

$$y^2+4y=(y+2)^2-4.$$

После этого данное уравнение запишется так:

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-4=0.$$

Перенося свободные члены вправо, будем иметь:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением окружности (1), усматриваем, что $a=1$, $b=-2$, $R=3$. Таким образом, центром окружности является точка $(1, -2)$ и радиус окружности равен 3. По этим данным мы можем построить окружность.

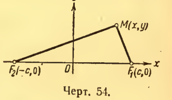
Пример. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-2x=0$. Придавая уравнению вид

$$(x-1)^2-1+y^2=0, \text{ или } (x-1)^2+y^2=1,$$

заключаем, что радиус окружности равен 1, центром же служит точка $(1, 0)$.

[1]) Так как $a=-\frac{D}{2}$, $b=-\frac{E}{2}$ и $R^2=a^2+b^2-F=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$, то при $D^2+E^2-4F>0$ уравнение (1″) определяет окружность радиуса $R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$, при $D^2+E^2-4F=0$ уравнение (1″) определяет окружность нулевого радиуса (точку), при $D^2+E^2-4F<0$ уравнение (1″) не определяет никакого геометрического образа; в этом случае говорят, что оно определяет мнимую окружность.

§ 3. Эллипс. *Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная* (эта постоянная должна быть больше расстояния между фокусами)[1]).



Черт. 54.

Чтобы составить уравнение эллипса, примем за ось абсцисс прямую, соединяющую две данные точки F_1 и F_2, выбрав на ней положительное направление от F_2 к F_1; начало координат возьмём в середине отрезка, соединяющего две данные точки (черт. 54). Обозначим через $2c$ расстояние F_1F_2 между фокусами. Тогда координаты точек F_1 и F_2 будут соответственно $(c,\ 0)$ и $(-c,\ 0)$. Обозначая через x и y координаты произвольной точки M эллипса, выразим длины отрезков F_1M и F_2M по формуле расстояния между двумя точками (гл. I, § 5):

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

По определению эллипса сумма $F_1M + F_2M$ есть величина постоянная. Обозначая её через $2a$, имеем:

$$F_1M + F_2M = 2a,$$

или

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Это есть уравнение эллипса в выбранной системе координат.

Чтобы найденное уравнение эллипса приняло простейший вид, нужно в этом уравнении освободиться от радикалов. Перенося один радикал направо, получим:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Возводя в квадрат обе части, найдём:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 =$$
$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

или

$$-4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

т. е.

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

---

[1]) Ясно, что эта постоянная не может быть меньше расстояния между фокусами; если же она будет равна расстоянию между фокусами, то рассматриваемым геометрическим местом точек будет отрезок прямой, ограниченный данными точками.

Возводя снова в квадрат, получим:

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2),$$

или

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$

т. е.

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Разделив обе части на $a^2(a^2 - c^2)$, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \qquad (2)$$

Так как по условию $c < a$, то $a^2 - c^2$ есть положительная величина; её принято обозначать через b^2. Тогда уравнение эллипса будет:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3)$$

где положено

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad (4)$$

Уравнение (3) называется *каноническим* уравнением эллипса [1]).

Займёмся исследованием формы эллипса. Это легко сделать, отправляясь от составленного уравнения (3).

1) Симметрия эллипса. Так как уравнение (3) содержит только квадраты текущих координат, то если точка (x, y) находится на эллипсе, то и точки $(\pm x, \pm y)$ находятся на эллипсе при произвольном выборе знаков у координат; следовательно, оси координат являются осями симметрии эллипса.

Ось симметрии эллипса, на которой располагаются фокусы, называется *фокальной* осью.

Точка пересечения осей симметрии — центр симметрии — называется *центром* эллипса. Для эллипса, заданного уравнением (3), фокальная ось совпадает с осью Ox, а центром является начало координат.

2) Точки пересечения с осями симметрии. Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его *вершинами*. Эллипс, заданный уравнением (3), имеет вершины в точках пересечения его с осями координат, так как последние являются осями симметрии. Полагая в уравнении (3) $y = 0$, найдём абсциссы точек пересечения эллипса с осью Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ откуда } x^2 = a^2 \text{ и } x = \pm a.$$

---

[1]) Очевидно, уравнению (3) удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на эллипсе. Можно показать, что уравнение (3) не даёт «лишних» точек, не принадлежащих эллипсу, несмотря на то, что для получения уравнения (3) нам пришлось два раза пользоваться возведением в квадрат обеих частей равенства.

Полагая $x=0$, найдём ординаты точек пересечения эллипса с осью Oy:

$$\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ откуда } y^2=b^2 \text{ и } y=\pm b.$$

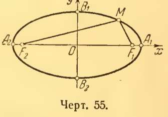
Следовательно, вершинами эллипса будут точки:

$$A_1(a, 0),\ A_2(-a, 0),\ B_1(0, b),\ B_2(0, -b)$$

(черт. 55).

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, соединяющие противоположные вершины эллипса, а также их длины $2a$ и $2b$, называют соответственно *большой* и *малой осями* эллипса. Длины a и b называют соответственно *большой* и *малой полуосями* эллипса.

3) Форма эллипса. Чтобы исследовать форму эллипса, достаточно считать в уравнении (3) $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, потому что, как было выше замечено, эллипс симметрично расположен относительно осей координат. Из уравнения (3) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$, или $x \leqslant a$, т. е. x может изменяться от 0 до a. С увеличением x от 0 до a ордината y уменьшается от b до 0. Таким образом, эллипс имеет форму, указанную на черт. 55.



Черт. 55.

Механическое построение эллипса. Зная фокусы F_1 и F_2 и длину $2a$ большой оси, легко механически построить эллипс. Нужно взять нить длиной $2a$, укрепить два её конца в точках F_1 и F_2 и, придав ей форму F_1MF_2, описать точкой M эллипс (в точке M поместить остриё карандаша).

При $a=b$ $(c=0)$ уравнение (3) принимает вид $x^2+y^2=a^2$ и определяет окружность. Поэтому окружность можно рассматривать как эллипс с равными полуосями.

§ 4. Гипербола и её асимптоты. *Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная* (эта постоянная должна быть положительной и меньше расстояния между фокусами)[1].

Обозначим эту постоянную через $2a$, расстояние между фокусами через $2c$ и выберем оси координат так же, как и в § 3. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы.

[1]) Ясно, что эта постоянная не может быть больше расстояния между фокусами F_1 и F_2; если она равна расстоянию между фокусами, то рассматриваемое геометрическое место состоит из совокупности тех точек прямой, проходящей через фокусы, которые лежат вне отрезка F_1F_2.

Геометрическим местом точек, разность расстояний которых до двух данных точек равна нулю, является перпендикуляр, проведённый к отрезку F_1F_2 в его середине.

По определению гиперболы

$$F_2M - F_1M = \pm 2a.$$

В правой части равенства нужно выбрать знак плюс, если $F_2M > F_1M$, и знак минус, если $F_2M < F_1M$.

Так как $F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то последнее равенство можно записать в виде:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Это и есть уравнение гиперболы в выбранной системе координат.

Освобождаясь в этом уравнении от радикалов (как и в § 3), можно привести уравнение к простейшему виду.

Перенося первый радикал в правую часть равенства и возводя обе части в квадрат, после очевидных преобразований получим:

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Возведя ещё раз обе части равенства в квадрат, сделав приведение подобных членов и разделив на свободный член, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{2}$$

Так как $c > a$, то величина $c^2 - a^2$ положительна. Обозначая её через b^2, т. е. полагая

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{4'}$$

получим *каноническое уравнение гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ ^{1)}. \tag{3'}$$

Исследуем форму гиперболы.

1) Симметрия гиперболы. Так как уравнение (3′) содержит только квадраты текущих координат, то оси координат являются осями симметрии гиперболы (см. аналогичное утверждение для эллипса). Ось симметрии гиперболы, на которой располагаются фокусы, называется *фокальной* осью. Точка пересечения осей симметрии — центр симметрии — называется *центром* гиперболы. Для гиперболы, заданной уравнением (3′), фокальная ось совпадает с осью Ox, а центром является начало координат.

2) Точки пересечения с осями симметрии. Найдём точки пересечения гиперболы с осями симметрии — *вершины* гиперболы. Полагая в уравнении (3′) $y = 0$, найдём абсциссы точек пересечения гиперболы с осью Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ откуда } x^2 = a^2 \text{ и } x = \pm a.$$

[1]) Очевидно, уравнению (3′) удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей гиперболе. Можно показать, что ему не будут удовлетворять координаты точек, не лежащих на гиперболе.

Следовательно, точки $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$ являются вершинами гиперболы (черт. 56); расстояние между ними равно $2a$. Чтобы найти точки пересечения с осью Oy, положим в уравнении (3′) $x=0$. Получим для определения ординат этих точек уравнение

$$-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ или } y^2=-b^2,$$

откуда

$$y=\pm\sqrt{-b^2}=\pm b\sqrt{-1},$$

т. е. для y мы получили мнимые значения; это означает, что ось Oy не пересекает гиперболы. В соответствии с этим ось симметрии, пересекающая гиперболу, называется *действительной осью симметрии* (*фокальной осью*); ось симметрии, которая не пересекает гиперболы, называется *мнимой осью симметрии*. Для гиперболы, заданной уравнением (3′), действительной осью симметрии является ось Ox, мнимой осью симметрии — ось Oy. Отрезок A_1A_2, соединяющий вершины гиперболы, а также его длина $2a$ называются *действительной осью* гиперболы. Если на мнимой оси симметрии гиперболы отложить в обе стороны от её центра O отрезки OB_1 и OB_2 длиною b, то отрезок B_1B_2, а также его длина $2b$ называются *мнимой осью* гиперболы. Величины a и b называются соответственно *действительной и мнимой полуосями* гиперболы.

3) Форма гиперболы. При исследовании формы гиперболы достаточно рассматривать положительные значения x и y, потому что кривая симметрично расположена относительно осей координат. Так как из уравнения (3′) следует, что $\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$, то x может изменяться от a до $+\infty$. Когда x увеличивается от a до $+\infty$, то y тоже увеличивается от 0 до $+\infty$. Кривая имеет форму, изображённую на черт. 56. Она располагается вне полосы, ограниченной прямыми $x=\pm a$, и состоит из двух отдельных ветвей. Для любой точки M одной из этих ветвей $F_2M > F_1M$ и $F_2M-F_1M=2a$ (правая ветвь), для любой точки M другой ветви $F_1M > F_2M$ и $F_1M-F_2M=2a$ (левая ветвь).

4) Асимптоты гиперболы. Чтобы более ясно представить себе вид гиперболы, рассмотрим две прямые линии, тесно с нею связанные — так называемые асимптоты.

Предполагая x и y положительными, разрешим уравнение (3′) гиперболы относительно ординаты y:

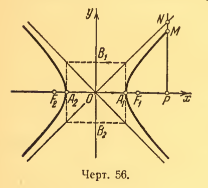
$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1,$$

откуда

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (3'')$$

Сопоставим уравнение (3″) с уравнением прямой линии $y=\frac{b}{a}x$, называя соответствующими две точки $N(x, Y)$ и $M(x, y)$.

расположенные соответственно на этой прямой и на гиперболе и имеющие одну и ту же абсциссу x (черт. 56). Очевидно, $Y > y$ и разность $Y - y$ ординат соответствующих точек выражает расстояние между ними, т. е. $MN = Y - y$.



Черт. 56.

Покажем, что при неограниченном возрастании x расстояние MN, убывая, стремится к нулю. В самом деле,

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

откуда

$$MN = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

После упрощения получим:

$$MN = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Из последней формулы мы усматриваем, что при неограниченном возрастании абсциссы x расстояние MN убывает и стремится к нулю. Отсюда следует, что когда точка M, двигаясь по гиперболе в первом квадранте, удаляется в бесконечность, то её расстояние до прямой $y = \frac{b}{a}x$ уменьшается и стремится к нулю. То же обстоятельство будет иметь место при движении точки M по гиперболе в третьем квадранте (вследствие симметрии относительно начала координат O).

Наконец, вследствие симметрии гиперболы относительно оси Oy мы получим вторую прямую $y = -\frac{b}{a}x$, симметрично расположенную с прямой $y = \frac{b}{a}x$, к которой также будет неограниченно приближаться точка M при движении по гиперболе и удалении в бесконечность (во втором и четвёртом квадрантах).

Эти две прямые линии носят название *асимптот гиперболы*; они, как мы видели, имеют уравнения:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x. \tag{5}$$

Очевидно, *асимптоты гиперболы располагаются по диагоналям прямоугольника, одна сторона которого параллельна оси Ox и равна $2a$, другая — параллельна оси Oy и равна $2b$, а центр лежит в начале координат* (см. черт. 56).

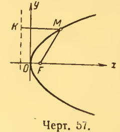
При вычерчивании гиперболы по её уравнению рекомендуется предварительно построить её асимптоты.

Равносторонняя гипербола. В случае $b=a$ гипербола называется *равносторонней*; её уравнение получается из (3′) и имеет вид:

$$x^2-y^2=a^2.$$

Очевидно, угловые коэффициенты асимптот $\left(k=\pm\frac{b}{a}\right)$ для равносторонней гиперболы будут ± 1. Следовательно, асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны между собой и делят пополам углы между её осями симметрии.

§ 5. Парабола. *Параболa есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой* (предполагается, что данная точка не лежит на прямой).



Черт. 57.

Чтобы составить уравнение параболы, примем за ось Ox прямую, проходящую через фокус F перпендикулярно к директрисе, и будем считать её направленной от директрисы к фокусу; за начало координат возьмём середину O отрезка от точки F до данной прямой, длину которого обозначим через p (черт. 57). Величину p называют *параметром* параболы. Координаты фокуса F будут $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. Обозначим через x и y координаты произвольной точки M параболы. Тогда координаты точки K — основания перпендикуляра, опущенного из M на директрису, будут $\left(-\frac{p}{2},\ y\right)$. Так как по определению $FM=MK$, то, применяя формулу расстояния между двумя точками (гл. I, § 5), получим уравнение параболы в выбранной системе координат:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Чтобы придать ему простейший вид, возведём обе части в квадрат. Будем иметь:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

или

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

откуда

$$y^2=2px. \tag{6}$$

Полученное уравнение называется *каноническим* уравнением параболы [1]).

Чтобы исследовать форму параболы по её уравнению (6), заметим, что x не может принимать отрицательных значений, т. е.

---

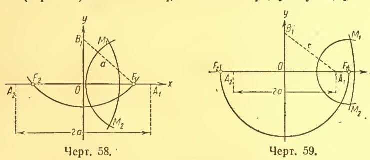
[1]) Ясно, что уравнению (6) удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на параболе. Легко показать, что оно удовлетворяется только координатами точек, лежащих на параболе.

все точки параболы лежат справа от оси Oy. Каждому значению x соответствуют два значения y, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, т. е. кривая симметрично расположена относительно оси Ox. С увеличением x абсолютная величина ординаты y увеличивается, причём когда x неограниченно растёт, то $|y|$ тоже неограниченно растёт. Кривая имеет вид, данный на черт. 57.

Парабола имеет одну ось симметрии; ось симметрии параболы называют *её осью*. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется ее *вершиной*. Для параболы, заданной уравнением (6), вершиной является начало координат.

Заметим, что все три рассмотренные линии — эллипс, гипербола, парабола — в декартовой системе координат могут быть представлены уравнениями второй степени.

§ 6. Построение точек эллипса, гиперболы и параболы посредством циркуля и линейки. Из уравнения эллипса (§ 3) определяем a и b, изображая их отрезками OA_1 и OB_1 на осях координат (черт. 58). Из точки B_1, как из центра, радиусом, равным a,



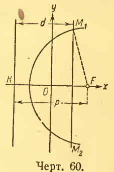
Черт. 58. Черт. 59.

описываем окружность, которая в пересечении с осью Ox даст фокусы эллипса F_1 и F_2, так как при таком построении соблюдается зависимость $c^2 = a^2 - b^2$. Найдя фокусы эллипса, делим отрезок $2a$ на две части: r_1 и $r_2 = 2a - r_1$, и радиусами, равными r_1 и r_2, описываем две окружности, принимая за их центры соответственно фокусы F_1 и F_2. Точки пересечения этих окружностей лежат на эллипсе, так как сумма расстояний каждой из этих точек до фокусов будет равна $2a$. Меняя r_1, будем получать новые точки эллипса.

Аналогично проводится построение точек гиперболы. Определяя из уравнения гиперболы (§ 4) a и b, изображаем их отрезками OA_1 и OB_1 на осях координат (черт. 59). Из точки O, как из центра, радиусом, равным $c = A_1B_1$, описываем окружность, которая в пересечении с осью Ox даст фокусы гиперболы F_1 и F_2 (так как при этом построении соблюдается равенство $c^2 = a^2 + b^2$).

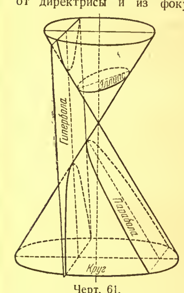
Найдя фокусы гиперболы, описываем из них, как из центров, две окружности радиусов r_1 и $r_2 = 2a + r_1$. Точки M_1 и M_2 пере-

сечения окружностей лежат на правой ветви гиперболы, так как разность расстояний каждой из этих точек до фокусов будет равна $r_2 - r_1 = 2a$. Меняя r_1, будем получать новые точки правой ветви гиперболы. Изменяя роль фокусов, получим точки левой ветви гиперболы.



Черт. 60.

Перейдём, наконец, к построению точек параболы. Прежде всего строим фокус и директрису параболы, откладывая по оси Ox вправо от O отрезок OF, равный $\frac{p}{2}$, такой же отрезок OK — влево от O и проводя через точку K прямую, перпендикулярную к оси параболы (черт. 60). Параметр p определяется из уравнения параболы. Проводим прямую линию, перпендикулярную к оси параболы, на произвольном расстоянии d $\left(d \geqslant \frac{p}{2}\right)$ от директрисы и из фокуса F, как из центра, описываем окружность радиуса d. Точки пересечения M_1 и M_2 проведённой прямой линии с окружностью принадлежат параболе, так как для каждой из этих точек расстояния до фокуса и директрисы равны между собой.



Черт. 61.

§ 7. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения. Эллипс, гипербола и парабола могут быть получены сечением прямого кругового конуса плоскостями[1]). Поэтому кривые эти называют коническими сечениями.

Рассмотрим сечения прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину (черт. 61). Можно доказать, что если плоскость пересекает лишь одну полость конуса, не будучи параллельна ни одной из образующих его, то кривая сечения будет эллипсом; если же секущая плоскость будет параллельна одной из образующих конуса, то кривая сечения будет параболой. В том случае, когда плоскость пересекает обе полости конуса, кривая сечения будет гиперболой.

---

[1]) Под прямым круговым конусом мы понимаем здесь коническую поверхность, которая получится, если каждую образующую обыкновенного прямого кругового конуса, рассматриваемого в элементарной геометрии, продолжить неограниченно в обе стороны. Поверхность эта может быть получена вращением прямой вокруг некоторой оси, пересекающей эту прямую.

Итак, в зависимости от положения секущей плоскости сечением прямого кругового конуса будет эллипс, гипербола или парабола.

§ 8. Эксцентриситет и директрисы эллипса. Как известно из § 3, эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых его фокусами, есть величина постоянная. Обозначая через $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ расстояния любой точки M эллипса соответственно до его правого и левого фокусов F_1 и F_2 (черт. 55), мы имеем согласно вышеупомянутому определению эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{7}$$

С другой стороны, применяя формулы расстояния между двумя точками, мы получим (гл. IV, § 3):

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

где x, y обозначают координаты точки M эллипса, а c — половину фокусного расстояния F_1F_2. Возводя два последних равенства в квадрат и вычитая, находим:

$$r_2^2 - r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получаем:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx. \tag{8}$$

Из уравнений (7) и (8), считая в них искомыми величинами r_1 и r_2, мы определяем последние. С этой целью, переписав уравнение (8) в виде

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx,$$

воспользуемся уравнением (7), что нам даст:

$$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x.$$

Решая полученное уравнение совместно с уравнением (7), найдём r_1 и r_2:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x,$$
$$r_2 = a + \frac{c}{a}x.$$

Величина $\frac{c}{a}$, входящая в последние формулы, называется *эксцентриситетом* эллипса; мы будем обозначать её через ε. Очевидно, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ есть отношение фокусного расстояния $2c$ к длине большой

оси $2a$, причём $0 \leqslant \varepsilon < 1$, так как $0 \leqslant c < a$ (для окружности $c = 0$ и $\varepsilon = 0$). Таким образом, мы имеем следующие формулы для *фокальных радиусов* r_1 и r_2:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x. \tag{9}$$

Рассмотрим прямую $x = l\,(l > a)$, параллельную оси Oy, и найдём, во-первых, расстояние r_1 произвольной точки $M(x, y)$ эллипса от его правого фокуса и, во-вторых, — расстояние d_1 этой точки M от прямой $x = l$ (черт. 62). Вычислим отношение этих расстояний.

Так как $d_1 = l - x$, то

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{l - x} = \varepsilon\,\frac{\frac{a}{\varepsilon} - x}{l - x}.$$

Если $l = \frac{a}{\varepsilon}$, то написанное отношение $\frac{r_1}{d_1}$ будет сохранять постоянное значение, равное ε.

Черт. 62.

В силу симметрии то же заключение можно сделать относительно левого фокуса F_2 и прямой с уравнением

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Эти две прямые, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$ от его центра, называются *директрисами эллипса*[1]). Как мы выяснили, они обладают следующим свойством: *отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная* ε.

Пример. Найти эксцентриситет и директрисы эллипса $x^2 + 2y^2 = 2$. Написав уравнение эллипса в виде:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

заключаем, что $a^2 = 2$, $b^2 = 1$. Следовательно, $c^2 = a^2 - b^2 = 2 - 1 = 1$, откуда

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Директрисы проходят на расстоянии $\frac{a^2}{c}$ от центра эллипса (начала координат), т. е. на расстоянии, равном $\frac{2}{1} = 2$. Уравнения директрис

$$x = +2, \quad x = -2.$$

[1]) Окружность не имеет директрис.

§ 9. Эксцентриситет и директрисы гиперболы. Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, в силу определения гиперболы (гл. IV, § 4) имеем:

$$r_2 - r_1 = \pm 2a, \tag{10}$$

где знак плюс относится к правой ветви гиперболы, а знак минус к левой. С другой стороны, как и в предыдущем параграфе, найдем:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx. \tag{8}$$

Из уравнений (10) и (8) находим искомые величины r_1 и r_2. Для этого, переписав уравнение (8) в виде

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx,$$

воспользуемся уравнением (10), что нам даст:

$$r_2 + r_1 = \pm 2\frac{c}{a}x.$$

Наконец, решая последнее уравнение совместно с уравнением (10), получим выражения для r_1 и r_2:

$$r_1 = -a + \frac{c}{a}x; \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x \text{ (правая ветвь)};$$

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x; \quad r_2 = -a - \frac{c}{a}x \text{ (левая ветвь)}.$$

Величина $\frac{c}{a}$, входящая в последние формулы, называется *эксцентриситетом* гиперболы; условимся обозначать её через ε. Очевидно, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ есть отношение фокусного расстояния $2c$ к длине действительной оси $2a$, причём теперь $\varepsilon > 1$, так как $c > a$. Итак, мы имеем следующие формулы для фокальных радиусов r_1 и r_2 гиперболы:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -a + \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x \text{ (правая ветвь)}; \\ r_1 &= a - \varepsilon x, \quad r_2 = -a - \varepsilon x \text{ (левая ветвь)}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

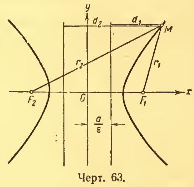
Назовём прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси гиперболы и расположенные на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от её центра, *директрисами* гиперболы, соответствующими правому и левому фокусам. Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$ и, следовательно, директрисы располагаются между вершинами.

Легко показать, что *отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная* ε. Это свойство достаточно вследствие симметрии обнаружить относительно правого фокуса и соответствующей ему директрисы.

Обозначая через d_1 расстояние точки $M(x, y)$ гиперболы до правой директрисы, из черт. 63 усматриваем, что $d_1 = x - \frac{a}{\varepsilon}$ в случае, если M находится на правой ветви гиперболы, и $d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x$, если M лежит на левой ветви. Составим теперь отношение $\frac{r_1}{d_1}$, пользуясь формулами (11):

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{-a + \varepsilon x}{x - \frac{a}{\varepsilon}} \text{ (правая ветвь);}$$

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} \text{ (левая ветвь).}$$



Черт. 63.

В обоих случаях отношение $\frac{r_1}{d_1}$ будет одинаково и равно:

$$\frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

что и требовалось показать.

§ 10. Эксцентриситет и директриса параболы. В § 5 настоящей главы мы определили параболу как геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки — фокуса и данной прямой — директрисы. Таким образом, обозначая через r расстояние любой точки M параболы до фокуса, а через d её расстояние до директрисы, мы имеем $r = d$, или $\frac{r}{d} = 1$ (черт. 57). Поэтому *эксцентриситет параболы принимают равным единице*. Уравнение директрисы параболы будет:

$$x = -\frac{p}{2},$$

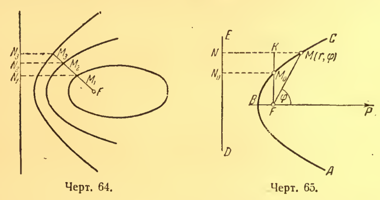
если оси координат выбраны так, как это было сделано в § 5.

Объединяя результаты трёх параграфов, мы получаем следующее общее определение конического сечения (эллипса, гиперболы и параболы): *коническое сечение есть геометрическое место точек, отношение расстояний которых до данной точки (фокуса) и до*

данной прямой (*директрисы*) *есть величина постоянная* (ε). При этом (черт. 64)

$$\text{для эллипса}\quad \frac{FM_1}{M_1N_1}=\varepsilon<1,$$
$$\text{для параболы}\quad \frac{FM_2}{M_2N_2}=\varepsilon=1,$$
$$\text{для гиперболы}\quad \frac{FM_3}{M_3N_3}=\varepsilon>1\ ^{1)}.$$

§ 11. Уравнение конического сечения в полярных координатах. Задача настоящего параграфа — вывести уравнение конического сечения в полярных координатах, принимая за полюс один из фокусов и за полярную ось — фокальную ось этого конического сечения.



Черт. 64. Черт. 65.

Пусть ABC (черт. 65) — дуга конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы), B — вершина, F — фокус и DE — соответствующая директриса.

Примем точку F за полюс, а прямую BFP — за полярную ось, выбрав на ней направление от фокуса F в сторону, противоположную директрисе; обозначим эксцентриситет кривой через ε. Пусть M_0 — точка дуги BC конического сечения, лежащая на перпендикуляре к полярной оси, проходящем через полюс F. Обозначим длину FM_0 через p и будем называть её ***фокальным параметром*** конического сечения.

Пусть $M(r, \varphi)$ — произвольная точка кривой. Составим уравнение, выражающее зависимость между её полярными координатами

---

¹) В §§ 7 и 8 было показано, что эллипс и гипербола обладают указанным свойством. Можно доказать и обратное: геометрическое место точек, отношение расстояний которых до данной точки и до данной прямой есть величина постоянная, представляет собой эллипс, если эта постоянная <1, и гиперболу, если она >1. Отсюда следует, что это свойство можно принять за определение конического сечения.

r, φ и данными числами ε, p. По общему свойству всех точек конического сечения имеем:

$$\frac{FM}{NM}=\varepsilon. \tag{12}$$

При любом расположении точки M на коническом сечении

$$FM=r \quad \text{и} \quad NM=N_0M_0+r\cos\varphi.$$

Так как $\frac{FM_0}{N_0M_0}=\varepsilon$, а $FM_0=p$, то $N_0M_0=\frac{p}{\varepsilon}$. Следовательно,

$$NM=\frac{p}{\varepsilon}+r\cos\varphi. \tag{13}$$

Тогда равенство (12) можно переписать в виде

$$\frac{r}{\frac{p}{\varepsilon}+r\cos\varphi}=\varepsilon,$$

откуда

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \tag{14}$$

Уравнение (14) будет определять эллипс, если $\varepsilon<1$, параболу — при $\varepsilon=1$, гиперболу, когда $\varepsilon>1$.

В уравнении (14) величина p для параболы имеет, очевидно, прежнее значение, т. е. то же, что и в уравнении $y^2=2px$. В самом деле, для параболы $p=FM_0=M_0N_0$, т. е. p есть расстояние фокуса до директрисы (параметр параболы).

Для эллипса и гиперболы можно поставить вопрос: как выразить фокальный параметр p через полуоси a и b?

В случае эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ мы подставим в его уравнение координаты одной из точек эллипса, а именно $M_0(-c, p)$; после этого получим:

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1,$$

или

$$\frac{p^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$p^2=\frac{b^4}{a^2} \quad \text{и} \quad p=\frac{b^2}{a}.$$

В случае гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ координаты её точки $M_0(c, p)$ подставим в уравнение, после чего получим:

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1, \quad \text{или} \quad \frac{p^2}{b^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

откуда снова имеем:

$$p^2=\frac{b^4}{a^2} \quad \text{и} \quad p=\frac{b^2}{a}.$$

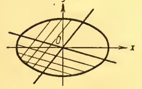
Итак, *уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах* (*при указанном выборе полюса и полярной оси*) *имеют одинаковый вид:*

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \tag{14}$$

причём для эллипса и гиперболы фокальный параметр p связан с параметрами a и b формулой

$$p=\frac{b^2}{a}. \tag{15}$$

В случае гиперболы уравнение (14) выведено для одной её ветви, но легко убедиться в том, что ему также удовлетворяют координаты любой точки, расположенной на другой ветви гиперболы.



Черт. 66.

§ 12. Диаметры эллипса. Сопряжённые диаметры. Рассмотрим эллипс, отнесённый к его осям симметрии[1]):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{16}$$

и систему параллельных между собой хорд с угловым коэффициентом k_1 (черт. 66). Посмотрим, как располагаются середины этих хорд. Иными словами, выясним, каким условием связаны координаты середин параллельных между собой хорд эллипса. Возьмём любую из хорд и обозначим её концы через $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, а середину — через $M(X, Y)$. Так как точки M_1 и M_2 лежат на эллипсе, то их координаты должны удовлетворять его уравнению (16), т. е.

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1; \tag{17}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1. \tag{18}$$

Выражая угловой коэффициент k_1 прямой линии M_1M_2 через координаты двух её точек (гл. III, § 12), будем иметь:

$$k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{19}$$

[1]) Оси симметрии эллипса приняты за координатные оси.

Наконец, заметив, что точка M является серединой отрезка M_1M_2, получим:

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{20}$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{21}$$

Исключим из пяти соотношений (17) — (21) четыре вспомогательные величины x_1, x_2, y_1, y_2. С этой целью, вычитая равенство (17) из равенства (18), найдем:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0,$$

или

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0.$$

Внося в последнее равенство согласно (20) вместо суммы $x_1 + x_2$ её значение $2X$, а вследствие (21) вместо суммы $y_1 + y_2$ её значение $2Y$ и согласно (19) вместо разности $y_2 - y_1$ её выражение $k_1(x_2 - x_1)$, мы придадим ему вид:

$$\frac{(x_2 - x_1)\,2X}{a^2} + \frac{k_1(x_2 - x_1)\,2Y}{b^2} = 0;$$

сокращая на $2(x_2 - x_1)$[1], мы получим окончательно:

$$\frac{X}{a^2} + \frac{k_1 Y}{b^2} = 0,$$

откуда (при $k_1 \neq 0$)

$$Y = -\frac{b^2}{a^2 k_1} X.$$

Таким образом, координаты середин параллельных между собой хорд эллипса связаны линейной зависимостью. И, значит, середины параллельных хорд располагаются на прямой

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k_1} x. \tag{22}$$

В наших рассуждениях мы предполагали, что рассматриваемые хорды имеют угловой коэффициент k_1 и, следовательно, не параллельны оси Oy. Середины хорд, параллельных оси Oy, тоже лежат на прямой — на оси Ox (в силу симметрии эллипса относительно оси Ox).

Итак, *середины параллельных хорд эллипса лежат на прямой. Прямая, проходящая через середины параллельных хорд эллипса, называется его диаметром. Все диаметры эллипса проходят через*

[1]) $x_2 - x_1 \neq 0$, так как по условию рассматриваемые хорды имеют угловой коэффициент k_1 и, следовательно, не параллельны оси Oy.

центр. Обозначая угловой коэффициент диаметра эллипса через k_2, имеем:

$$k_2 = -\frac{b^2}{a^2 k_1}, \tag{23}$$

или

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{23'}$$

Условимся называть диаметр эллипса *сопряжённым* хордам, через середины которых он проходит. Условие (23) или (23′) связывает между собой угловые коэффициенты параллельных хорд и *сопряжённого им диаметра*. Так как это условие (23′) симметрично относительно k_1 и k_2, т. е. не меняется после перестановки k_1 и k_2, то отсюда заключаем: если диаметр с угловым коэффициентом k_2 сопряжён хордам с угловым коэффициентом k_1, то и диаметр с угловым коэффициентом k_1 сопряжён хордам с угловым коэффициентом k_2.

Таким образом, мы получаем пару диаметров, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому диаметру (черт. 66). *Такие два диаметра эллипса называются сопряжёнными между собой*. Их угловые коэффициенты k_1 и k_2 связаны условием (23) или (23′).

Итак, у эллипса имеется бесчисленное множество пар сопряжённых между собой диаметров: каждому диаметру соответствует свой сопряжённый диаметр. В частности, *оси координат (оси симметрии эллипса) представляют собой пару сопряжённых диаметров*. Эти два сопряжённых между собой диаметра эллипса являются *взаимно перпендикулярными*. Такие диаметры называют *главными диаметрами* эллипса.

Из условия (23′) следует, что угол между любой другой парой сопряжённых между собой диаметров эллипса ($b \neq a$) отличен от прямого. Если же $b = a$, т. е. эллипс обращается в окружность, то условие (23′) обращается в условие перпендикулярности: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Таким образом, любые два сопряжённых диаметра окружности перпендикулярны между собой, т. е. *всякий диаметр окружности есть главный диаметр* (ось симметрии).

Из условия (23) видно, что угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух сопряжённых диаметров эллипса имеют разные знаки, т. е. диаметры проходят в смежных четвертях.

При увеличении k_1 ($k_1 > 0$) угловой коэффициент k_2 по абсолютной величине уменьшается, т. е. алгебраически также увеличивается. Это показывает, что при вращении диаметра эллипса против часовой стрелки сопряжённый с ним диаметр вращается в ту же сторону.

Пример. Определить длину диаметра эллипса $x^2 + 2y^2 = 1$, сопряжённого диаметру, делящему пополам первый координатный угол (длиной диаметра считают расстояние между точками пересечения его с кривой).

Угловой коэффициент данного диаметра есть 1. Из условия (23) находим угловой коэффициент k_2 диаметра, ему сопряжённого:

$$k_2 = -\frac{b^2}{a^2 k_1}.$$

Здесь $k_1 = 1$, $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $k_2 = -\frac{1}{2}$. Уравнение этого диаметра будет:

$$y = -\frac{1}{2}x.$$

Чтобы найти его длину, нужно определить точки его пересечения с эллипсом, для чего решим совместно уравнения эллипса и диаметра:

$$x^2 + 2y^2 = 1 \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{2}x.$$

Подставляя в первое уравнение выражение y из второго, найдём:

$$x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 1, \quad \frac{3}{2}x^2 = 1, \quad x^2 = \frac{2}{3}, \quad \text{откуда } x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Зная абсциссы точек пересечения, найдём их ординаты:

$$y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

По формуле расстояния между двумя точками находим длину d искомого диаметра:

$$d^2 = \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3},$$

откуда

$$d = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{30}.$$

§ 13. Диаметры гиперболы. Сопряжённые диаметры. Рассмотрим теперь гиперболу, отнесённую к её осям симметрии:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{24}$$

и систему параллельных между собой хорд с угловым коэффициентом k_1 (черт. 67).

Производя вычисления, аналогичные проделанным для эллипса, найдём, что середины этих хорд лежат на прямой, имеющей уравнение

$$y = \frac{b^2}{a^2 k_1}x, \tag{25}$$

Черт. 67.

которое может быть получено из уравнения (22) заменой b^2 на $-b^2$, так как уравнение гиперболы отличается от уравнения эллипса лишь знаком при b^2. Точно так же середины хорд, параллельных оси Oy, лежат на оси Ox. Следовательно,

середины параллельных между собой хорд гиперболы лежат на прямой. Эта прямая называется *диаметром* гиперболы.

Итак, *все диаметры гиперболы суть прямые, проходящие через центр.* Обозначая угловой коэффициент диаметра гиперболы через k_2, имеем:

$$k_2 = \frac{b^2}{a^2 k_1}, \tag{26}$$

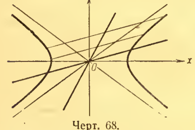
или

$$k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}. \tag{26'}$$

Условимся называть диаметр гиперболы *сопряжённым* хордам, через середины которых он проходит. Условие (26) или (26′) связывает между собой угловые коэффициенты параллельных хорд и сопряжённого им диаметра. Так как условие (26′) симметрично относительно k_1 и k_2, то отсюда заключаем: если диаметр с угловым коэффициентом k_2 сопряжён хордам с угловым коэффициентом k_1, то диаметр с угловым коэффициентом k_1 сопряжён хордам с угловым коэффициентом k_2. Таким образом, мы получаем *пару диаметров, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому диаметру* (черт. 67). *Такие два диаметра гиперболы называются сопряжёнными между собой.* Их угловые коэффициенты k_1 и k_2 связаны условием (26) или (26′).

Итак, у гиперболы имеется бесчисленное множество пар сопряжённых диаметров: каждому диаметру соответствует свой сопряжённый диаметр.

Оси координат (оси симметрии гиперболы) представляют собой пару сопряжённых и перпендикулярных диаметров. Такие два диаметра называют *главными диаметрами* гиперболы.



Черт. 68.

Из условия (26) видно, что угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух сопряжённых диаметров гиперболы имеют одинаковые знаки, т. е. диаметры проходят в одинаковых четвертях и лежат по разные стороны асимптоты $\left(\text{если } |k_1| < \frac{b}{a}, \text{ то } |k_2| > \frac{b}{a}\right)$; один из них пересекает гиперболу в двух точках, а другой гиперболы не пересекает (черт. 68).

С увеличением k_1 ($k_1 > 0$), как следует из условия (26), k_2, оставаясь положительным, уменьшается. Это показывает, что при вращении диаметра гиперболы против часовой стрелки сопряжённый с ним диаметр вращается в обратную сторону, т. е. по часовой стрелке.

При этом, если угловой коэффициент k_1 одного из диаметров стремится к $\frac{b}{a}$, то угловой коэффициент k_2 сопряжённого диаметра тоже стремится к $\frac{b}{a}$.

§ 14. Диаметры параболы. Рассмотрим, наконец, параболу, заданную каноническим уравнением

$$y^2 = 2px, \qquad (27)$$

и возьмём систему параллельных между собой хорд с угловым коэффициентом k. Выясним, как располагаются середины этих хорд. Обозначим концы любой из этих хорд через $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, а середину — через $M(X, Y)$. Так как точки M_1 и M_2 лежат на параболе, то их координаты должны удовлетворять её уравнению (27), т. е.

$$y_1^2 = 2px_1, \qquad (28)$$

$$y_2^2 = 2px_2. \qquad (29)$$

С другой стороны, прямая линия M_1M_2 имеет угловой коэффициент k, что даёт нам соотношение (гл. III, § 12)

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (30)$$

Наконец, заметив, что точка M является серединой отрезка M_1M_2, получим:

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad (31)$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (32)$$

Исключим из пяти соотношений (28) — (32) четыре вспомогательные величины x_1, x_2, y_1, y_2. С этой целью, вычитая равенство (28) из равенства (29), найдём:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1),$$

или

$$(y_2 - y_1)(y_1 + y_2) = 2p(x_2 - x_1).$$

Внося в последнее равенство согласно (32) вместо суммы $y_1 + y_2$ её значение $2Y$, а вследствие (30) вместо разности $y_2 - y_1$ её выражение $k(x_2 - x_1)$, мы придадим ему вид:

$$k(x_2 - x_1)\,2Y = 2p(x_2 - x_1);$$

сокращая на $2(x_2 - x_1)$ [1], получим окончательно

$$kY = p,$$

[1] $x_2 - x_1 \neq 0$, так как рассматриваемые хорды имеют угловой коэффициент k и, следовательно, не параллельны оси Oy.

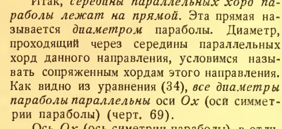
откуда (так как $k \neq 0$)

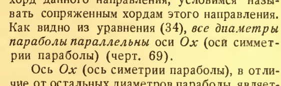
$$Y = \frac{p}{k}. \tag{33}$$

Таким образом, середины параллельных хорд параболы лежат на прямой

$$y = \frac{p}{k}. \tag{34}$$

Мы предполагали, что рассматриваемые хорды не параллельны оси Oy. Середины хорд, параллельных оси Oy, тоже лежат на прямой — на оси Ox (так как ось Ox является осью симметрии параболы).



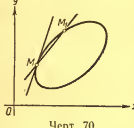


Черт. 69.

Итак, *середины параллельных хорд параболы лежат на прямой.* Эта прямая называется *диаметром* параболы. Диаметр, проходящий через середины параллельных хорд данного направления, условимся называть сопряженным хордам этого направления. Как видно из уравнения (34), *все диаметры параболы параллельны* оси Ox (оси симметрии параболы) (черт. 69).

Ось Ox (ось симетрии параболы), в отличие от остальных диаметров параболы, является диаметром, *перпендикулярным к сопряжённым ему хордам.* Такой диаметр называют *главным диаметром* параболы.

§ 15. Касательная. Рассмотрим точку $M(x_0, y_0)$ на коническом сечении (эллипсе, гиперболе или параболе) и проведём через неё секущую MM_1 (черт. 70). Эта секущая пересекает коническое сечение в двух точках: M и M_1. Оставляя точку M неподвижной, заставим вторую точку пересечения M_1 неограниченно приближаться к точке M, следуя по коническому сечению. При этом секущая MM_1 будет вращаться около точки M, и то *предельное положение, которое займёт секущая, когда точка M_1 сольётся с M, называется касательной к коническому сечению в точке M.* Точка M называется *точкой прикосновения.* Уравнение касательной как прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$, будет (гл. III, § 9)



Черт. 70.

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{35}$$

где k есть угловой коэффициент касательной в точке M, подлежащий определению. Чтобы определить k, обозначим координаты точки M_1 через $x_0 + h$, $y_0 + l$; тогда угловой коэффициент секущей MM_1 как прямой, проходящей через две точки $M(x_0, y_0)$ и

$M_1(x_0+h,\ y_0+l)$, будет $\frac{l}{h}$ (гл. III, § 12). Угловой же коэффициент k касательной будет пределом $\frac{l}{h}$, когда h стремится к нулю (точка M_1 стремится к точке M), т. е.

$$k=\lim_{h\to 0}\frac{l}{h}.$$

Так как h и l суть приращения соответственно абсциссы и ординаты точки M конического сечения, то k является пределом отношения приращения ординаты (функции) к приращению абсциссы (независимого переменного), когда это последнее стремится к нулю. Из дифференциального исчисления известно, что такой предел есть производная от ординаты y по абсциссе x, взятая для точки $M(x_0,\ y_0)$, т. е.

$$k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,$$

где значок $_0$ указывает, что значение производной нужно брать для точки $(x_0,\ y_0)$. Зависимость же функции y от независимого переменного x задаётся уравнением конического сечения.

Пример 1. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $(x_0,\ y_0)$.

Дифференцируя уравнение эллипса, получим:

$$\frac{2x}{a^2}\,dx+\frac{2y}{b^2}\,dy=0,\quad \text{откуда}\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Следовательно, $k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Уравнение касательной будет

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\,(x-x_0).$$

Умножая на $\frac{y_0}{b^2}$, получим:

$$\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2},\ \text{т. е.}\ \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}.$$

Так как точка $(x_0,\ y_0)$ лежит на эллипсе, то правая часть последнего уравнения равна 1, и уравнение касательной примет вид:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $(x_0,\ y_0)$.

Аналогично примеру 1 получим уравнение касательной к гиперболе в виде:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Посмотрим, во что обратится уравнение касательной к гиперболе, если точка (x_0, y_0) удалится в бесконечность. Перепишем уравнение касательной в виде:

$$y = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}x - \frac{b^2}{y_0}$$

и заметим, что (x_0, y_0) удовлетворяет условию

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \text{ откуда } \frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{y_0^2}.$$

Заставляя теперь точку (x_0, y_0) удаляться в бесконечность, следуя по гиперболе, получим, переходя к пределу в последнем равенстве:

$$\lim\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ или } \left[\lim\frac{x_0}{y_0}\right]^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ откуда } \lim\frac{x_0}{y_0} = \pm\frac{a}{b}.$$

Уравнение касательной в пределе примет вид:

$$y = \frac{b^2}{a^2}\cdot\left(\pm\frac{a}{b}\right)x, \text{ или } y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Это суть уравнения двух асимптот гиперболы. Таким образом, *когда точка касания удаляется в бесконечность, касательная стремится к положению асимптоты гиперболы.*

Пример 3. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке (x_0, y_0).

Дифференцируя уравнение параболы, найдём:

$$2y\,dy = 2p\,dx, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Следовательно, $k = \frac{p}{y_0}$, и уравнение касательной будет

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0),$$

или, умножая на y_0

$$yy_0 - y_0^2 = px - px_0.$$

Так как точка (x_0, y_0) лежит на параболе, то её координаты удовлетворяют уравнению параболы $y_0^2 = 2px_0$. Заменяя в уравнении касательной y_0^2 его значением, найдём:

$$yy_0 = px + px_0, \quad \text{или} \quad yy_0 = p(x + x_0).$$

Угловой коэффициент касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ конического сечения (эллипса, гиперболы, параболы) возможно определить, не применяя дифференциального исчисления. С этой целью заметим, что направление касательной к коническому сечению в точке M_0 совпадает с направлением хорд, сопряжённых диаметру, проходящему через точку M_0. Следовательно, из условия сопряжённости (23′) в случае эллипса получим угловой коэффициент k_1 касательной в точке M_0, если заменим в нём k_2 угловым коэффициентом диаметра, проходящего через точку M_0; заметив, что $k_2 = \frac{y_0}{x_0}$, получим:

$$k_1 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Аналогично для гиперболы из условия (26′) найдём угловой коэффициент касательной к ней в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Наконец, в случае параболы угловой коэффициент k касательной в точке M_0 определится из условия прохождения её диаметра, имеющего уравнение (34) $y = \frac{p}{k}$, через точку M_0, т. е. $y_0 = \frac{p}{k}$, откуда

$$k = \frac{p}{y_0}.$$

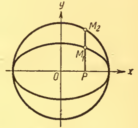
§ 16. Эллипс как проекция окружности. Пусть дан эллипс своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b).$$

Рассмотрим уравнение окружности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

описанной около эллипса (черт. 71).



Черт. 71.

Назовём две точки M_1 и M_2, лежащие соответственно на эллипсе и окружности, соответствующими точками, если они имеют одну и ту же абсциссу и лежат по одну и ту же сторону от оси Ox. Обозначая их общую абсциссу вел $\overline{OP} = x$ и ординаты — вел $\overline{PM_1} = y$ и вел $\overline{PM_2} = Y$, имеем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1.$$

Сравнив два последних уравнения, заключаем, что

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{Y^2}{a^2},$$

или, разрешив это уравнение относительно y^2, получаем:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} Y^2,$$

откуда окончательно

$$y = \frac{b}{a} Y.$$

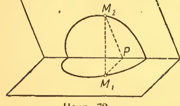
Так как $\frac{b}{a} < 1$, то мы вправе положить

$$\frac{b}{a} = \cos\varphi,$$

и зависимость между ординатами соответствующих точек представится в виде:

$$y = Y \cos \varphi.$$

Последняя формула показывает, что величина y направленного отрезка $\overline{PM_1}$ может быть рассматриваема как проекция направленного отрезка $\overline{PM_2}$ (черт. 72), если угол между $\overline{PM_1}$ и $\overline{PM_2}$ принять равным φ.



Черт. 72.

Отсюда следует, что если поместить окружность в плоскости, наклонённой к плоскости эллипса под углом φ, то эллипс будет являться ортогональной проекцией этой окружности (черт. 72).

§ 17. Параметрические уравнения эллипса. Сохраняя обозначения черт. 71 предыдущего параграфа, напомним, что координаты соответствующих точек $M_1(x, y)$ и $M_2(X, Y)$ эллипса и окружности связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= X, \\ y &= \frac{b}{a} Y. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Так как параметрические уравнения окружности имеют вид (гл. II, § 5):

$$X = a \cos t,$$
$$Y = a \sin t,$$

то, заменяя в (36) X и Y их выражениями через параметр t, получим:

$$x = a \cos t,$$
$$y = \frac{b}{a} a \sin t,$$

или окончательно

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \sin t.$$

Это и есть параметрические уравнения эллипса.

Упражнения

Окружность

1. Написать уравнение окружности, зная, что:

а) центр окружности лежит в точке $(-2, -3)$ и радиус её равен 3 единицам длины;

б) центр лежит в точке $(2, -3)$ и окружность проходит через точку $(5, 1)$;

в) концы одного из диаметров имеют координаты $(3, 9)$ и $(7, 3)$.

2*. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $(9, 3)$, $(-3, 3)$, $(11, 1)$.

3*. Какие значения должны иметь коэффициенты уравнения

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

чтобы оно определяло окружность радиуса 5 с центром в точке $(3, 2)$?

4*. Определить координаты центра и радиус окружности, выражаемой уравнением:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$; б) $2x^2 + 2y^2 + 5x - 3y - 2 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$; г) $x^2 + y^2 + 3y = 0$.

5. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат на расстояниях a единиц от начала координат.

6. Найти уравнение окружности, касающейся оси Oy в начале координат и пересекающей ось Ox в точке $(6, 0)$.

7. Найти уравнение окружности, касающейся оси Ox в начале координат и пересекающей ось Oy в точке $(0, -8)$.

8. Найти уравнение окружности, касающейся оси Ox в точке $(-5, 0)$ и имеющей радиус, равный 3 единицам длины.

9*. Найти уравнение окружности, центр которой лежит в точке $(4, 7)$ и которая касается прямой $3x - 4y + 1 = 0$.

10*. Вывести уравнение касательной к окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ в точке (x_0, y_0).

11. Составить уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = r^2$ в точке (x_0, y_0).

12. Написать уравнение касательной к окружности $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$ в точке $(3, 6)$.

13*. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 = 10$, проходящих через точку $(-5, -5)$.

14. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 = 5$, проходящих через точку $(-7, 1)$.

15*. а) Найти касательные к окружности $x^2 + y^2 = 13$, параллельные прямой $4x + 6y - 5 = 0$. б) Найти касательные к окружности $x^2 + y^2 + 5x = 0$, перпендикулярные к прямой $4x - 3y + 7 = 0$.

16*. Найти длину (d) касательной, проведённой из точки $M(7, 8)$ к окружности $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 14$.

17. а) Даны точки $A(-6, 0)$ и $B(2, 0)$. Найти геометрическое место точек, из которых отрезки OA и OB видны под равными углами. б) Все хорды ON окружности $x^2 + y^2 = 2ax$, проведённые из начала координат, продолжены за точку N на расстояние $NM = ON$. Найти геометрическое место точек M.

Эллипс

18. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:
а) полуоси его равны соответственно 5 и 4;
б) расстояние между фокусами равно 8 и большая ось равна 10;
в) малая полуось равна 2 и расстояние между фокусами равно 6;
г) большая полуось равна 10 и эксцентриситет равен 0,6;
д) малая полуось равна 6 и эксцентриситет равен 0,8;
е) эксцентриситет равен 0,8 и расстояние между фокусами равно 8;
ж) сумма полуосей равна 10 и расстояние между фокусами равно $4\sqrt{5}$.

19. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением:

а) $16x^2 + 25y^2 = 400$, б) $9x^2 + y^2 = 36$.

20. Определить эксцентриситет эллипса, если:

а) отрезок, соединяющий его фокусы, виден из конца малой оси под прямым углом;

б) расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой осей;

в) его большая ось втрое больше малой;

г) его оси относятся, как $5:3$.

21. Дан эксцентриситет эллипса ε. Найти отношение его полуосей. Как величина эксцентриситета характеризует форму эллипса?

22. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр его находится в точке $(5, 0)$. Составить уравнение эллипса, зная, что эксцентриситет его равен $0,6$.

23. Эллипс касается оси абсцисс в точке $(8, 0)$ и оси ординат в точке $(0, -5)$. Написать уравнение эллипса, если известно, что оси его параллельны осям координат.

24. Эллипс касается оси ординат в точке $(0, 5)$ и пересекает ось абсцисс в точках $(5, 0)$ и $(11, 0)$. Составить уравнение эллипса, если известно, что оси его параллельны осям координат.

25. Сколько касательных к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ можно провести из точки $(1, 1)$, сколько из точки $(3, 1)$ и сколько из точки $(0, 2)$?

26. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ в точке $(-3, 3)$.

27. Известно, что прямая $2x-5y-30=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{24}=1$. Найти точку их прикосновения.

28*. Найти уравнения касательных, проведённых из точки $(4, -1)$ к эллипсу $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

29. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$, проходящие через точку $(-3, 1)$.

30*. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$, параллельные прямой $6x-2y-5=0$.

31. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$, перпендикулярные к прямой $x-y+5=0$.

32. Написать уравнения директрис эллипса $\frac{x^2}{96}+\frac{y^2}{32}=1$.

33. Написать уравнение эллипса, малая полуось которого равна $2\sqrt{6}$ и директрисами которого служат прямые $x=\pm 10$.

34. Найти уравнение эллипса, расстояние между фокусами которого равняется 2 и расстояние между директрисами 10.

35. Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между его директрисами в три раза больше расстояния между фокусами.

36. Расстояние между директрисами эллипса равняется 36. Найти уравнение этого эллипса, зная, что фокальные радиусы некоторой его точки равны 9 и 15.

37. Расстояние между фокусами эллипса равно 8, расстояние между его директрисами равно 12,5. Найти простейшее уравнение этого эллипса.

38*. Дан эллипс $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$. Через точку $(1, 1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

39. Дан эллипс $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. Через точку $(2, -1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

40. Найти длину диаметра эллипса $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$, направленного по биссектрисе второго координатного угла.

41*. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проведённые в концах одного и того же диаметра, параллельны.

42. Найти уравнения диаметров эллипса $x^2+\frac{y^2}{9}=1$, длины которых равны $2\sqrt{5}$.

43. Найти угол между двумя сопряжёнными диаметрами эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$, из которых один наклонён к большой оси под углом в 30°.

44. Найти для эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ направления и длины двух сопряжённых диаметров, из которых один проходит через точку $(4, 2)$.

45. Определить длины сопряжённых диаметров эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$, которые образуют между собой угол в 60°.

46*. Найти уравнения равных сопряжённых диаметров эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

47. Написать уравнения двух равных сопряжённых диаметров эллипса

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1.$$

48. Найти угол между двумя равными сопряжёнными диаметрами эллипса

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1.$$

49*. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Определить кривую, описываемую любой точкой M, лежащей на этом отрезке.

50. Найти простейшее полярное уравнение эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Гипербола

51. Составить простейшее уравнение гиперболы, зная, что:
а) полуоси её равны соответственно 5 и 4 единицам длины;
б) расстояние между фокусами равно 14, а расстояние между вершинами 12;
в) действительная полуось равна 5 и эксцентриситет равен 1,4;
г) расстояние между фокусами равно 16 и эксцентриситет равен $\frac{4}{3}$;
д) действительная полуось равна $\sqrt{15}$ и гипербола проходит через точку $(5, -2)$;
е) гипербола проходит через точки $(2\sqrt{7}, -3)$ и $(-7, -6\sqrt{2})$.

52. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением:

а) $25x^2-144y^2=3600$, б) $16y^2-9x^2=144$.

53. а) Найти зависимость между эксцентриситетом гиперболы и углом между её асимптотами; б) выразить отношение полуосей гиперболы через эксцентриситет. Как влияет величина эксцентриситета на форму гиперболы?

54*. Дана гипербола $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$. Найти уравнение диаметра, длина которого равна $2\sqrt{29}$.

55. На гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ взята точка, абсцисса которой равна 8 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиусы этой точки.

56. Дан эллипс $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

57. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ в точках пересечения её с прямой $3x-5y=0$.

58. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$, проходящие через точку (2, 1).

59. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, параллельные прямой $3x-2y=0$.

60. Доказать, что для гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ произведение расстояний от фокусов до касательной равно b^2.

61. Доказать, что асимптоты равнобочной гиперболы делят пополам углы между её сопряжёнными диаметрами.

62*. 1) Найти отклонение фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ от асимптоты. 2) Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до асимптот есть величина постоянная.

63. Даны фокальный параметр p и эксцентриситет ε гиперболы. Найти полуоси.

64. Гипербола касается прямой $x-y-3=0$ в точке (5, 2). Составить уравнение этой гиперболы.

65. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$, перпендикулярные к прямой $x+2y-3=0$.

66. Найти уравнение гиперболы, зная, что расстояние между её директрисами равно 6, а расстояние между фокусами 10.

67. Найти эксцентриситет гиперболы, если известно, что расстояние между её директрисами в три раза меньше расстояния между фокусами.

68. Найти уравнения двух сопряжённых диаметров гиперболы $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$, угол между которыми равен 45°.

69. Найти уравнения диаметров гиперболы $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, длина которых равна $2\sqrt{5}$.

70. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. Написать уравнения асимптот.

71. Найти уравнение гиперболы, если известно, что:
а) $a=b$ и директрисы даны уравнениями $x=\pm 2$;

б) асимптоты даны уравнениями $y = \pm \frac{1}{2}x$ и расстояние между фокусами равно 10;

в) асимптоты даны уравнениями $y = \pm \frac{3}{5}x$ и гипербола проходит через точку $(10, -3\sqrt{3})$.

72. Даны точки $A(-1, 0)$ и $B(2, 0)$. Точка M движется так, что в треугольнике AMB угол B остаётся вдвое больше угла A. Определить траекторию движения.

73. Две прямые вращаются около двух неподвижных точек в противоположных направлениях и с одинаковой угловой скоростью. При начале движения одна из этих прямых совпадает с прямой, соединяющей данные точки, а другая перпендикулярна к этой прямой. Найти геометрическое место точек пересечения этих прямых.

74. Составить уравнение касательной к гиперболе $xy = m$ в точке (x_0, y_0).

Парабола

75. Составить уравнение параболы, зная, что:

а) осью симметрии параболы служит ось Ox, вершина лежит в начале координат и расстояние от фокуса до вершины равно 4 единицам длины;

б) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $(2, -4)$ и вершина её лежит в начале координат;

в) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $(-2, 4)$ и вершина её лежит в начале координат;

г) парабола симметрична относительно оси Oy, фокус лежит в точке $(0, 3)$ и вершина совпадает с началом координат;

д) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через точку $(4, 2)$ и вершина её лежит в начале координат;

е) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через точку $(-4, -2)$ и вершина совпадает с началом координат;

ж) фокус имеет координаты $(3, 0)$, директриса служит осью ординат и ось симметрии — осью абсцисс;

з) фокус имеет координаты $(0, 3)$, директриса служит осью абсцисс и ось симметрии — осью ординат.

76. Составить уравнение параболы, зная, что вершина её лежит в точке (a, b), параметр равен p и направление оси симметрии совпадает:

а) с положительным направлением оси Ox;

б) с отрицательным направлением оси Ox;

в) с положительным направлением оси Oy;

г) с отрицательным направлением оси Oy.

77. Составить уравнение параболы, зная, что вершина её лежит в начале координат, направление оси симметрии совпадает с отрицательным направлением оси Ox, а параметр p равен расстоянию от фокусов гиперболы $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ до асимптот.

78. Составить уравнение параболы, зная, что вершина её лежит в точке $(-2, 1)$, направление оси симметрии совпадает с отрицательным направлением оси Oy, а параметр p равен расстоянию между директрисами эллипса $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$.

79. Найти длину хорды, проходящей через фокус параболы $y^2 = 2px$ и перпендикулярной к её оси симметрии.

80*. Дана парабола $y^2 = 6x$. Через точку $(4, 1)$ провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке пополам.

81. Дана парабола $y^2 = -8x$. Через точку $(-1, 1)$ провести такую хорду, которая в этой точке делилась бы пополам.

82. Найти уравнения диаметров параболы $y^2 = 8x$, сопряжённых с хордами, наклонёнными к ним под углом в 45°.

83. Дана парабола $y^2 = 10x$. Найти к этой параболе касательные в точках, в которых она пересекается с прямой $y = 4x - 5$.

84. Найти такую точку на параболе $y^2 = 12x$, чтобы касательная в ней образовывала с осью симметрии параболы угол в 30°.

85. Найти касательные к параболе $y^2 = 4x$, проходящие через точку $(3, -4)$.

86. Найти уравнение касательной к параболе $y^2 = 16x$, которая была бы: а) параллельна прямой $2x - y + 5 = 0$; б) перпендикулярна к прямой $x - y - 7 = 0$.

87. Найти геометрическое место центров кругов, проходящих через данную точку и касающихся данной прямой.

ГЛАВА V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ

§ 1. Задача преобразования координат. Положение точки на плоскости определяется двумя координатами относительно некоторой системы координат. Координаты точки изменятся, если мы выберем другую систему координат. Задача преобразования координат состоит в том, чтобы, *знаял координаты точки в одной системе координат, найти её координаты в другой системе.* Эта задача будет разрешена, если мы установим формулы, связывающие координаты произвольной точки по двум системам, причём в коэффициенты этих формул войдут постоянные величины, определяющие взаимное положение систем.

Пусть даны две декартовы системы координат xOy и XO_1Y (черт. 73). Положение новой системы XO_1Y относительно старой системы xOy будет определено, если известны координаты a и b нового начала O_1 по старой системе и угол α между осями Ox и O_1X.

Черт. 73.

Обозначим через x и y координаты произвольной точки M относительно старой системы, через X и Y — координаты той же точки относительно новой системы. Наша задача заключается в том, чтобы старые координаты x и y выразить через новые X и Y. В полученные формулы преобразования должны, очевидно, входить постоянные a, b и α. Решение этой общей задачи мы получим из рассмотрения двух частных случаев.

1. *Меняется начало координат, направления же осей остаются неизменными* ($\alpha = 0$).

2. *Меняются направления осей, начало же координат остаётся неизменным* ($a = b = 0$).

§ 2. Перенос начала координат. Пусть даны две системы декартовых координат с разными началами O и O_1 и одинаковыми направлениями осей (черт. 74). Обозначим через a и b координаты нового начала O_1 в старой системе и через x, y и X, Y — координаты

произвольной точки M соответственно в старой и новой системах. Проектируя точку M на оси O_1X и Ox, а также точку O_1 на ось Ox, получим на оси Ox три точки O, A и P. Как известно (гл. I, § 1), величины отрезков $\overline{OA}$, $\overline{AP}$ и $\overline{OP}$ связаны следующим соотношением:

$$\text{вел}\,\overline{OA}+\text{вел}\,\overline{AP}=\text{вел.}\,\overline{OP}. \qquad (1)$$

Черт. 74.

Заметив, что вел $\overline{OA}=a$, вел $\overline{OP}=x$, вел $\overline{AP}=$ вел $\overline{O_1P_1}=X$, перепишем равенство (1) в виде:

$$a+X=x, \text{ или } x=X+a. \qquad (2)$$

Аналогично, проектируя M и O_1 на ось ординат, получим:

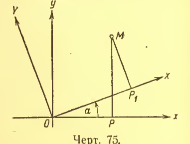
$$y=Y+b. \qquad (3)$$

Итак, *старая координата равна новой плюс координата нового начала по старой системе.*

Из формул (2) и (3) новые координаты можно выразить через старые:

$$X=x-a, \qquad (2')$$
$$Y=y-b. \qquad (3')$$

§ 3. Поворот осей координат. Пусть даны две декартовы системы координат с одинаковым началом O и разными направлениями осей (черт. 75). Пусть α есть угол между осями Ox и OX. Обозначим через x, y и X, Y координаты произвольной точки M соответственно в старой и новой системах: $x=$ вел $\overline{OP}$, $y=$ вел $\overline{PM}$, $X=$ вел $\overline{OP_1}$, $Y=$ вел $\overline{P_1M}$.



Черт. 75.

Рассмотрим ломаную линию $\overline{OP_1MP}$ и возьмём её проекцию на ось Ox. Замечая, что проекция ломаной линии равна проекции замыкающего отрезка (гл. I, § 8), имеем:

$$\text{пр}\,\overline{OP_1MP}=\text{вел}\,\overline{OP}. \qquad (4)$$

С другой стороны, проекция ломаной линии равна сумме проекций её звеньев (гл. I, § 8); следовательно, равенство (4) запишется так:

$$\text{пр}\,\overline{OP_1}+\text{пр}\,\overline{P_1M}+\text{пр}\,\overline{MP}=\text{вел}\,\overline{OP}. \qquad (4')$$

Так как проекция направленного отрезка равна его величине, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью, на которой лежит отрезок (гл. I, § 8), то

$$\text{пр}\,\overline{OP_1}=X\cos\alpha,\ \text{пр}\,\overline{P_1M}=Y\cos(90°+\alpha)=-Y\sin\alpha,$$
$$\text{пр}\,\overline{MP}=0.$$

Отсюда равенство (4') нам даёт:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha. \tag{5}$$

Аналогично, проектируя ту же ломаную на ось Oy, получим формулу для y. В самом деле, имеем:

$$\text{пр}\,\overline{OP_1} + \text{пр}\,\overline{P_1M} + \text{пр}\,\overline{MP} = \text{пр}\,\overline{OP} = 0.$$

Заметив, что

$$\text{пр}\,\overline{OP_1} = X\cos(\alpha - 90^\circ) = X\sin\alpha, \quad \text{пр}\,\overline{P_1M} = Y\cos\alpha,$$
$$\text{пр}\,\overline{MP} = -y,$$

будем иметь:

$$X\sin\alpha + Y\cos\alpha - y = 0,$$

или

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) мы получим новые координаты X и Y выраженными через старые x и y, если разрешим уравнения (5) и (6) относительно X и Y.

Замечание. Формулы (5) и (6) могут быть усмотрены непосредственно из черт. 76. Действительно,

$$x = OP = OS - PS.$$

С другой стороны, из прямоугольного треугольника OSP_1:

$$OS = OP_1\cos\alpha = X\cos\alpha,$$

а из треугольника MP_1N:

$$PS = NP_1 = Y\sin\alpha.$$

Черт. 76.

Подставляя значения OS и PS в формулу для x, мы получим:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha.$$

Аналогично из черт. 76 находим:

$$y = PM = PN + NM.$$

Из прямоугольного треугольника OSP_1 получаем:

$$PN = SP_1 = X\sin\alpha,$$

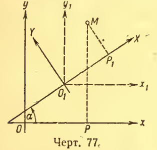
а из треугольника MP_1N:

$$NM = Y\cos\alpha.$$

Подставляя значения PN и NM в формулу для y, получим:

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

§ 4. Общий случай. Пусть даны две декартовы системы координат с разными началами и разными направлениями осей (черт. 77). Обозначим через a и b координаты нового начала O_1 по старой системе, через α — угол поворота координатных осей и, наконец, через x, y и X, Y — координаты произвольной точки M соответственно по старой и новой системам.



Черт. 77.

Чтобы выразить x и y через X и Y, введём вспомогательную систему координат $x_1O_1y_1$, начало которой поместим в новом начале O_1, а направления осей возьмём совпадающими с направлениями старых осей. Пусть x_1 и y_1 обозначают координаты точки M относительно этой вспомогательной системы. Переходя от старой системы координат к вспомогательной, имеем (§ 2):

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b.$$

Переходя, далее, от вспомогательной системы координат к новой, найдём (§ 3):

$$x_1 = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y_1 = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Заменяя x_1 и y_1 в предыдущих формулах их выражениями из последних формул, найдём окончательно:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha + a, \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Формулы (I) содержат как частный случай формулы §§ 2 и 3. Так, при $\alpha = 0$ формулы (I) обращаются в

$$x = X + a, \quad y = Y + b,$$

а при $a = b = 0$ имеем:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

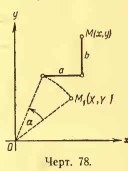
Из формул (I) мы получим новые координаты X и Y выраженными через старые x и y, если уравнения (I) разрешим относительно X и Y.

Отметим весьма важное свойство формул (I): они линейны относительно X и Y, т. е. вида:

$$x = AX + BY + C, \quad y = A_1X + B_1Y + C_1.$$

Легко проверить, что новые координаты X и Y выразятся через старые x и y тоже формулами первой степени относительно x и y.

§ 5. Механическое истолкование формул преобразования координат. Рассмотрим формулы (I) предыдущего параграфа с другой точки зрения. Сохраняя прежние обозначения, будем считать, что одна и та же точка M в старой системе имеет координаты x, y, а в новой X, Y. Тогда x, y и X, Y будут связаны формулами (I). Вообразим себе, что точка M неизменно связана с новыми осями O_1X и O_1Y, и передвинем эти оси так, чтобы они совместились со старыми. Тогда точка M, передвигаясь вместе с осями O_1X и O_1Y, займёт некоторое положение M_1 относительно старых осей (черт. 78). Так как новые оси совпадут при этом перемещении со старыми, а точка M неизменно связана с новыми осями, то M_1 будет иметь в старой системе координаты X, Y. Итак, точка M_1 в старой системе имеет координаты X, Y, а точка M тоже в старой системе имеет координаты x, y, причём выполняются формулы (I).



Черт. 78.

Ясно, что точка M может быть получена из точки M_1 вращением вокруг O на угол α, а затем сдвигом параллельно оси Ox на расстояние $|a|$ (в положительном направлении, если $a > 0$, и в отрицательном при $a < 0$) и сдвигом параллельно оси Oy на расстояние $|b|$ (в положительном направлении, если $b > 0$, и в отрицательном при $b < 0$).

Таким образом, формулы (I), будучи отнесены к одной и той же системе xOy, связывают координаты двух различных точек $M_1(X, Y)$ и $M(x, y)$, причём вторая точка получается из первой при помощи указанного движения.

Очевидно, формулы § 2 выражают лишь поступательное движение, а формулы § 3 — одно вращательное движение.

§ 6. Некоторые приложения формул преобразования координат. 1. Уравнение равносторонней гиперболы относительно асимптот.

Рассмотрим равностороннюю гиперболу, отнесённую к её осям симметрии:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптоты её взаимно перпендикулярны (угловые коэффициенты асимптот равны 1 и −1; см. гл. IV, § 4).

Принимая их за новые оси координат, мы должны повернуть старые оси координат на угол $\pm 45°$. Формулы преобразования:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

при $\alpha = -45°$ (поворот по часовой стрелке) примут вид:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y),\qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - X).$$

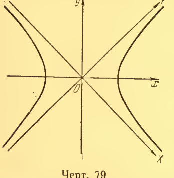
Подставляя эти значения x и y в уравнение гиперболы $x^2-y^2=$ $=a^2$, получим:

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2-\frac{1}{2}(Y-X)^2=a^2.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получим:

$$2XY=a^2, \quad \text{или} \quad XY=\frac{a^2}{2}. \tag{7}$$

Это и есть *уравнение равносторонней гиперболы, когда осями координат служат её асимптоты* (черт. 79). Читателю рекомендуется проверить, что, выбирая угол поворота $\alpha=+45°$, мы получим уравнение равносторонней гиперболы в виде:



Черт. 79.

$$XY=-\frac{a^2}{2}.$$

2. **Геометрический смысл дробно-линейной функции.** Дано уравнение

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\text{ [1]}.$$

Требуется исследовать кривую, определяемую этим уравнением.

Будем считать $c\neq 0$, так как в случае $c=0$ наше уравнение будет, очевидно, уравнением прямой линии. Разделив числитель и знаменатель на c, придадим уравнению вид:

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{x+\delta},$$

где положено:

$$\alpha=\frac{a}{c},\ \beta=\frac{b}{c},\ \delta=\frac{d}{c}.$$

Предварительно упростим уравнение кривой, перенеся начало координат в новую точку плоскости. Пусть координаты нового начала x_0, y_0 пока произвольны. Формулы преобразования суть:

$$x=X+x_0, \quad y=Y+y_0.$$

Подставляя в данное уравнение вместо x и y их выражения через X и Y, найдём:

$$(X+x_0+\delta)(Y+y_0)=\alpha(X+x_0)+\beta.$$

Раскрываем скобки и делаем приведение подобных членов.

$$XY+(y_0-\alpha)\ X+(x_0+\delta)\ Y+(x_0y_0-\alpha x_0+\delta y_0-\beta)=0.$$

[1]) Предположим, что $ad-bc\neq 0$, так как в противном случае уравнение не содержало бы переменного x.

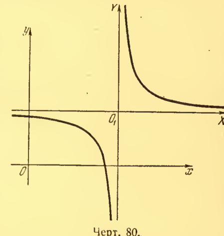
Так как x_0 и y_0 произвольны, то выберем их так, чтобы исчезли члены с X и Y. Для этого нужно положить $y_0-\alpha=0$, $x_0+\delta=0$, откуда

$$x_0=-\delta,\quad y_0=\alpha.$$

Внося эти значения в преобразованное уравнение, получим:

$$XY=\beta-\alpha\delta.$$

Очевидно, полученное уравнение является уравнением равносторонней гиперболы, для которой новые оси координат являются асимптотами (см. предыдущий пример). Следовательно, *данное уравнение определяет равностороннюю гиперболу с центром в точке* (x_0, y_0), *асимптоты которой параллельны осям координат* (черт. 80 соответствует случаю $\beta-\alpha\delta>0$).



Черт. 80.

3. Геометрический смысл квадратной функции.

Дано уравнение

$$y=ax^2+bx+c.$$

Требуется исследовать кривую, определяемую этим уравнением.

Предварительно упростим уравнение кривой, перенеся начало координат в новую точку плоскости. Пусть координаты нового начала x_0, y_0 пока произвольны. Формулы преобразования суть:

$$x=X+x_0,\quad y=Y+y_0.$$

Подставляя в данное уравнение вместо x и y их выражения через X и Y, найдём:

$$Y+y_0=a(X+x_0)^2+b(X+x_0)+c.$$

Раскрываем скобки и делаем приведение подобных членов:

$$Y=aX^2+(2ax_0+b)\ X+(ax_0^2+bx_0+c-y_0).$$

Подберём x_0 и y_0 так, чтобы исчезли член с X в первой степени и свободный член. Для этого нужно положить

$$2ax_0+b=0,$$
$$ax_0^2+bx_0+c-y_0=0,$$

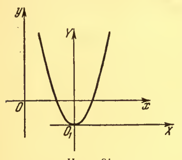
откуда

$$x_0=-\frac{b}{2a},\quad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Внося эти значения в преобразованное уравнение, получим:

$$Y = aX^2.$$

Очевидно, что полученное уравнение определяет *параболу*, для которой новое начало координат является вершиной, а новая ось ординат служит осью симметрии. Следовательно, *данное уравнение определяет параболу с вершиной в точке* (x_0, y_0) *и осью симметрии, расположенной параллельно оси* Oy (черт. 81).



Черт. 81.

Для нахождения её вершины важно только обратить внимание на то, что $x_0 = -\frac{b}{2a}$, ордината же $y_0 = f(x_0)$ находится подстановкой значения x_0 в уравнение кривой.

Часто бывает также полезно для построения кривой $y = ax^2 + bx + c$ найти её точки пересечения с осью Ox (полагая $y = 0$), если только эти точки существуют, т. е. если корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ действительны. Заметим ещё, что при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

В приведённом исследовании мы считали $a \neq 0$; в случае $a = 0$ наше уравнение будет иметь вид:

$$y = bx + c$$

и, значит, ему будет соответствовать *прямая линия*.

Пример. Привести уравнение параболы $y = 3x^2 - 6x - 1$ к простейшему виду и найти координаты вершины.

Перенесём начало координат в точку (x_0, y_0). Формулы преобразования будут:

$$x = X + x_0, \qquad y = Y + y_0.$$

Заменяя в данном уравнении x и y их выражениями через X и Y, получим:

$$Y + y_0 = 3(X + x_0)^2 - 6(X + x_0) - 1,$$

или

$$Y = 3X^2 + (6x_0 - 6)X + 3x_0^2 - 6x_0 - y_0 - 1.$$

Полагая

$$6x_0 - 6 = 0,$$

$$3x_0^2 - 6x_0 - y_0 - 1 = 0,$$

найдём:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -4.$$

Внося эти значения в уравнение, будем иметь:

$$Y = 3X^2,$$

откуда получим простейшее уравнение параболы

$$X^2 = \frac{1}{3} Y.$$

Ось симметрии данной параболы параллельна оси Oy; вершина находится в точке $(1, -4)$.

§ 7. Составление формул преобразования координат в случае, когда даны уравнения новых осей. Пусть относительно некоторой декартовой системы координат xOy даны уравнения двух взаимно перпендикулярных прямых

$$Ax + By + C = 0 \tag{8}$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{9}$$

которые принимаются за новые оси (черт. 82). Чтобы составить формулы преобразования координат, нет необходимости определять синус и косинус угла поворота и координаты нового начала. Действительно, принимая прямую линию (8) за ось O_1X, заключаем, что уравнение (8) должно быть эквивалентно уравнению $Y = 0$ (уравнение оси O_1X в новой системе). Таким образом, $Ax + By + C$ и Y могут отличаться лишь постоянным множителем, т. е.

$$Y = \lambda (Ax + By + C). \tag{10}$$

y Y X O₁ O x

Черт. 82.

Чтобы найти величину множителя λ, заметим, что согласно формулам (I) § 4 коэффициенты при x и y, равные λA и λB, представляют собой синус и косинус угла α между осями O_1X и Ox, а потому сумма их квадратов равна 1, т. е. $\lambda^2A^2 + \lambda^2B^2 = 1$, откуда

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = 1,$$

или

$$\lambda^2 = \frac{1}{A^2 + B^2} \quad \text{и} \quad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставляя найденное значение λ в равенство (10), получим:

$$Y = \pm \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{11}$$

Эта формула даёт выражение новой ординаты Y через старые координаты x и y, причём выбор знака определяет собой положительное направление оси O_1Y. Аналогично, принимая прямую (9) за ось O_1Y, найдём:

$$X = \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \tag{12}$$

Выбор знака в формуле (12) определяет выбор положительного направления на оси O_1X.

Формулы (11) и (12) дают выражения новых координат X и Y через старые координаты x и y.

Замечание. Формулы (11) и (12) можно получить иначе, если заметить, что $|Y|$ и $|X|$ суть соответственно расстояния точки $M(x, y)$ до прямых линий, определяемых уравнениями (8) и (9) (гл. III, § 16).

Чтобы иметь выражения старых координат через новые, нужно разрешить уравнения (11) и (12) относительно x и y.

Пример. Найти формулы преобразования координат, если за новые оси приняты две прямые линии: $x+y-1=0$, $x-y+1=0$.

Принимая первую прямую за ось O_1X, вторую — за ось O_1Y, имеем:

$$X = \pm\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}, \quad Y = \pm\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}.$$

Новые оси координат строим по их уравнениям:

$$x+y-1=0 \quad \text{и} \quad x-y+1=0.$$

Что же касается выбора положительных направлений из новых осей, то он определён после фиксирования знаков в формулах для X и Y. Например, при таком выборе знаков:

Черт. 83.

$$X = \frac{x-y+1}{\sqrt{2}}, \quad Y = -\frac{x+y-1}{\sqrt{2}},$$

положительные направления новых осей идут так, как показано на черт. 83. В самом деле, при $x=y=0$ имеем:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad Y = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е. старое начало координат должно иметь положительную абсциссу и отрицательную ординату в новой системе.

§ 8. Классификация линий. Так как в аналитической геометрии линии определяются уравнениями, то в основу их классификации естественно положить свойства уравнений этих линий. В основу классификации линий мы положим свойства их уравнений в декартовых координатах. Перенося все члены уравнения в левую часть, мы придадим ему вид:

$$F(x, y) = 0, \tag{13}$$

где F есть символ функции от двух переменных x, y. *Если уравнение* (13) [*т. е. функция* $F(x, y)$] — *трансцендентное, то и линия, им определяемая, называется трансцендентной; если же уравнение* (13) — *алгебраическое, то и линия, им определяемая,*

называется алгебраической. Например, линия, которой соответствует уравнение

$$y = \sin x,$$

— трансцендентная; уравнение же

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

определяет алгебраическую линию. Так как одна и та же линия может быть представлена бесчисленным множеством различных уравнений, смотря по тому, к какой системе координат мы относим её уравнение, то, чтобы оправдать возможность указанной классификации линий на алгебраические и трансцендентные, необходимо показать, что *алгебраический или трансцендентный характер линии не зависит от положения осей координат.* Но действительно, так как формулы преобразования координат суть алгебраические, то всякое алгебраическое уравнение при любом преобразовании координат переходит в алгебраическое; отсюда уже следует, что трансцендентное уравнение при любом преобразовании координат переходит в трансцендентное же, так как если бы трансцендентное уравнение перешло в алгебраическое, то путём обратного преобразования алгебраическое уравнение переходило бы в трансцендентное, что невозможно.

Итак, алгебраический или трансцендентный характер линии (или, что то же, её уравнения) не зависит от выбора осей координат, а зависит лишь от свойств самой линии.

Далее, всякое алгебраическое уравнение можно освободить от радикалов и дробей, если таковые в нём имеются. Таким образом, уравнение алгебраической линии можно привести к виду:

$$\sum Ax^s y^t = 0,$$

т. е. левая часть такого уравнения есть сумма членов вида Ax^sy^t, где A есть постоянное число, s и t — целые положительные числа (или нули). Говоря кратко, левая часть уравнения алгебраической линии есть целый многочлен. Каждый член Ax^sy^t многочлена имеет определённое измерение, равное сумме показателей при x и y, т. е. $s+t$. Наивысшее из измерений всех членов уравнения называется *степенью* этого уравнения. *Если алгебраическая линия определяется в декартовых координатах уравнением n-й степени, то она называется линией n-го порядка.*

Так, в предыдущем примере мы имели линию 3-го порядка; всякой прямой линии в декартовых координатах соответствует уравнение первой степени, и следовательно, прямая линия есть линия 1-го порядка; наконец, окружность, эллипс, гипербола и парабола суть линии 2-го порядка, потому что им в декартовых координатах соответствуют уравнения второй степени. Чтобы это деление алгебраических линий по их порядкам было законным, необходимо показать, что оно не зависит от выбора осей координат, т. е.

что *порядок линии остаётся неизменным при любом преобразовании координат.* В самом деле, формулы преобразования декартовых координат в декартовы же, как мы в своё время отметили, являются линейными, т. е. первой степени. Следовательно, заменяя в алгебраическом уравнении n-го порядка x и y их выражениями первой степени через X и Y, мы не можем повысить порядок уравнения, т. е., обозначая через n' степень преобразованного уравнения, мы имеем:

$$n' \leqslant n. \tag{14}$$

С другой стороны, путём обратного преобразования мы переходим от нового уравнения степени n' к старому степени n, и, следовательно, так как степень уравнения не может повыситься, то должно быть:

$$n \leqslant n'. \tag{15}$$

Из сопоставления этих неравенств заключаем: $n = n'$, т. е. *порядок уравнения не изменяется при преобразовании декартовых координат.* Итак, порядок алгебраической линии не зависит от выбора осей координат, а зависит лишь от свойств самой линии.

В указанной классификации линий весьма существенным является то обстоятельство, что в основу положена декартова система координат. Эта классификация теряет всякий смысл, если пользоваться полярными координатами. В самом деле, как мы видели, окружность в полярных координатах может быть определена различными уравнениями:

$$r = a$$

и

$$r = 2a \cos \varphi,$$

смотря по выбору полюса и полярной оси. Первое из написанных уравнений относительно текущих координат r и φ есть алгебраическое и первой степени, второе же — трансцендентное. Таким образом, в полярных координатах одна и та же линия может определяться как алгебраическим, так и трансцендентным уравнением, смотря по выбору полюса и полярной оси. Вследствие этого нельзя классифицировать линии на основе их уравнений в полярных координатах.

Упражнения

1. Координаты точки относительно некоторой системы координат суть $x = 2$, $y = -1$. Чему будут равны координаты этой точки, если, сохраняя направление осей, перенести начало координат в точку:

а) (4, 5); б) (4, —5); в) (—4, 5); г) (—4, —5)?

2. Относительно двух систем координат, имеющих одно и то же направление осей, координаты некоторой точки суть (12, —7) и (0, 15). Чему равны координаты начала каждой из этих систем относительно другой?

3. При замене осей координат новыми, имеющими те же направления, что и оси прежней системы, координаты точки (5, 2) обращаются в (2, 5). Найти координаты начала каждой из этих систем относительно другой.

4. Две системы координат имеют одинаковые направления осей. Координаты начала первой системы относительно второй суть (7, -5). Чему равны координаты начала второй системы относительно первой?

5. Как изменятся координаты любой точки $M(x, y)$, если: а) изменить на противоположное направление на оси ординат; б) изменить на противоположные направления на обеих осях?

6. Как изменятся координаты любой точки $M(x, y)$, если за ось абсцисс принять ось ординат и за ось ординат ось абсцисс?

7. Чему будут равны координаты точки $M(1, \sqrt{3})$, если повернуть оси координат на угол в 60°?

8. На какой угол надо повернуть оси координат, чтобы координаты точки $M(2, 0)$ стали равны между собой?

9. Какой вид примет уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$, если оси координат повернуть на произвольный угол α?

10. Какой вид примет уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, если оси координат повернуть на угол в 45°?

11. Какой вид примет уравнение гиперболы $xy = 1$, если оси координат повернуть на угол в 45°?

12. Дано уравнение $y = 4x^2 - 8x + 5$. Преобразовать его так, чтобы оно не содержало члена с первой степенью x и свободного члена; начертить кривую.

13. То же для уравнения $y = -3x^2 + 5x$.

14. Дано уравнение $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$. Преобразовать его так, чтобы оно не содержало членов первого измерения; начертить кривую.

15. Упростить уравнения кривых:

$$\text{а) } 3x + 2y^2 + 6y - 1 = 0; \quad \text{б) } y^2 - 4x - 8y = 0.$$

16*. Упростить уравнения парабол

$$\text{а) } y = Ax^2 + Bx + C; \quad \text{б) } x = My^2 + Ny + P.$$

Найти также координаты вершин этих парабол и направления осей симметрии.

17. Построить параболы:

$$\text{а) } y = 2x^2 - 4x + 8; \qquad \text{б) } x^2 + 6x + y + 7 = 0;$$
$$\text{в) } y^2 + 8y - 2x + 12 = 0; \qquad \text{г) } 2y^2 + 4y + x + 6 = 0,$$

упростив предварительно их уравнения.

18. Найти координаты точки $A(0, 1)$ относительно новой системы координат, оси которой даны уравнениями $3x - 4y + 6 = 0$, $4x + 3y - 17 = 0$.

19. Найти координаты точки $A(-2, 0)$ относительно новой системы координат, оси которой даны уравнениями $12x - 5y - 2 = 0$, $5x + 12y - 29 = 0$.

20. Какого порядка алгебраическая кривая, выражаемая уравнением $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 1$?

21. Какие из ниженаписанных уравнений выражают алгебраические кривые и какие трансцендентные:

$$\text{а) } x^a + y^b + 1 = 0; \qquad \text{б) } a^x + b^y + 1 = 0;$$
$$\text{в) } x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0; \qquad \text{г) } \alpha\cos x + \beta\cos y - p = 0$$

(a, b, α, β — постоянные)?

22. Даны уравнения кривых в полярных координатах:

$$\text{а) } r = a\cos\varphi; \quad \text{б) } r = a + \frac{b}{\cos\varphi}; \quad \text{в) } r = a(1 + \cos\varphi).$$

Показать, что они выражают алгебраические кривые.

ГЛАВА VI

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го и 3-го ПОРЯДКА

§ 1. Определители 2-го порядка. Рассмотрим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Чтобы найти решение системы (1), исключим сначала неизвестное y. Для этого умножим первое уравнение на b_2 и второе на b_1, а затем, вычитая второе уравнение из первого, получим:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=c_1b_2-c_2b_1. \tag{2}$$

Аналогично исключим неизвестное x из системы (1) и найдём:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1. \tag{3}$$

Если

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

то из уравнений (2) и (3) получим определённое решение системы (1):

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{4}$$

Числитель и знаменатель полученных выражений называются определителями 2-го порядка. Вообще, если имеются четыре числа, расположенных в виде квадратной таблицы

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, \\ A_2, & B_2, \end{matrix}$$

то *определителем 2-го порядка*, соответствующим этой таблице, называется разность

$$A_1B_2-A_2B_1.$$

Для обозначения определителя принимают символ

$$A_1B_2-A_2B_1=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Числа A_1, A_2, B_1, B_2 называют *элементами определителя* (5); значок указывает номер строки, а алфавитный порядок буквы — номер столбца, на пересечении которых находится рассматриваемый элемент. Элементы A_1, B_2, образуют *главную диагональ* определителя, а элементы B_1 и A_2 — побочную.

Из формулы (5) явствует, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

т. е. при замене строк столбцами величина определителя 2-го порядка не изменяется, а при перестановке столбцов меняет знак на обратный. Очевидно, решение (4) системы (1) может быть выражено через определители таким образом:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (4')$$

Определитель, стоящий в знаменателе, составлен из коэффициентов при неизвестных системы (1) и носит название *определителя этой системы*. Определители, стоящие в числителях формул (4′), получаются из определителя системы путём замены соответственно первого и второго столбцов свободными членами этой системы.

Итак, если определитель системы (1) не равен нулю, то формулы (4′) дают единственное решение этой системы, причём значение неизвестного равно дроби, в знаменателе которой стоит определитель системы, в числителе же определитель, получающийся из определителя системы заменой коэффициентов при определяемом неизвестном свободными членами системы (стоящими в правой части).

Если определитель системы равен нулю, но по крайней мере один из определителей, стоящих в числителях выражений (4′) для x и y, отличен от нуля, то система (1) несовместна, т. е. не имеет никакого решения, как это следует из уравнений (2), (3).

В этом случае из равенства нулю определителя системы вытекает, что $a_1b_2 = a_2b_1$, откуда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, т. е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны. Очевидно, справедливо и обратное — если коэффициенты при неизвестных пропорциональны, то определитель системы равен нулю. Наконец, если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то система (1) неопределённа, т. е. имеет бесконечное множество решений. В этом случае одно из уравнений (1) есть следствие другого. В самом деле, мы имеем:

$$a_1b_2 = a_2b_1, \ \ c_1b_2 = c_2b_1, \ \ a_1c_2 = a_2c_1,$$

или

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

откуда вытекает, что одно из уравнений системы (1) есть следствие другого.

Таким образом, мы приходим к выводу:

1) если коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы (1) непропорциональны, то система совместна и определённа;

2) если коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены им не пропорциональны, то система несовместна;

3) если пропорциональны коэффициенты при неизвестных и свободные члены, то система неопределённа.

Все эти случаи могут быть истолкованы геометрически, если рассматривать уравнения (1) как уравнения двух прямых линий. В первом случае две прямые пересекаются в определённой точке, координаты которой представляют решение системы (1); во втором случае прямые параллельны и не совпадают; наконец, в третьем случае они сливаются друг с другом.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 8 &= 0, \\ x - 2y + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$ отличен от нуля, и, следовательно, система имеет единственное решение. Чтобы найти его, перенесём свободные члены направо и воспользуемся формулами (4'):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-7} = 1, \ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{aligned} 3x + \ y &= 1, \\ 6x + 2y &= 5. \end{aligned}$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$, причём определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 9$ отличен от нуля; следовательно, данная система несовместна, в чём убедимся непосредственно, если умножим первое уравнение на 2.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{aligned} x - 2y &= 3, \\ 2x - 4y - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$, причём оба определителя $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ тоже равны нулю; следовательно, данная система неопределённа. Дей-

ствительно, сокращая второе уравнение на 2, видим, что система приводится к одному уравнению

$$x - 2y = 3$$

и, следовательно, имеет бесконечное множество решений:

$$x = 2y + 3,$$

где y может принимать произвольные значения.

В частности, однородная система

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

либо имеет определённое решение, либо неопределённа, так как для неё случай несовместимости невозможен. Другими словами, система (6) имеет одно решение $x = y = 0$ (назовём его нулевым решением), если её определитель отличен от нуля. Если же

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

то одно из уравнений (6) есть следствие другого; система (6) приводится к одному уравнению, например

$$a_1x + b_1y = 0,$$

и имеет бесконечное множество решений, определяемых с точностью до произвольного множителя k: $x = kb_1$, $y = -ka_1$, и отличных от нулевого решения при $k \neq 0$. Геометрически уравнениям (6) соответствуют две прямые линии, проходящие через начало координат, которые либо различны и имеют единственную общую точку в начале координат, либо совпадают.

§ 2. Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными. Рассмотрим систему двух однородных уравнений с тремя неизвестными x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Предположим, что из трёх определителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

по крайней мере один, например первый, отличен от нуля. Тогда, перенося члены с z в правую часть и решая уравнения относительно x и y, получим на основании (4'):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z,$$

где z произвольно.

Введём обозначение

$$\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = k. \tag{8}$$

Тогда

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

где k есть произвольный множитель пропорциональности. Если взять $k \neq 0$, то получим решение системы, отличное от очевидного нулевого решения $x = y = z = 0$, получающегося при $k = 0$. Заметим, что определители формул (9), которым пропорциональны неизвестные системы (7), получаются из таблицы коэффициентов этой системы

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{matrix}$$

путём вычёркивания соответствующего столбца, при этом для среднего неизвестного необходимо ещё переставить столбцы в полученном определителе.

Если все три определителя, стоящие в формулах (9), равны нулю, то соответствующие коэффициенты уравнений (7) будут пропорциональны, и, следовательно, система (7) приведётся к одному уравнению

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

откуда, считая, например, $a_1 \neq 0$, получим:

$$x = -\frac{b_1y + c_1z}{a_1},$$

где y и z могут принимать любые значения.

Пример 1. Решить систему $x + 2y - 3z = 0$, $2x + 3y + z = 0$. Составляем таблицу из коэффициентов данной системы:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & -3 \\ 2, & 3, & 1 \end{matrix}$$

и, вычёркивая поочерёдно столбцы, образуем определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

(в среднем определителе меняем порядок столбцов). Согласно формулам (9) решение системы будет:

$$x = 11k, \quad y = -7k, \quad z = -k,$$

где k произвольно.

Пример 2. Решить систему

$$2x - y - 5z = 0, \quad 4x - 2y - 10z = 0.$$

Составляя таблицу из коэффициентов

$$\begin{matrix} 2, & -1, & -5 \\ 4, & -2, & -10 \end{matrix}$$

и вычёркивая поочерёдно столбцы, получим:

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, данная система приводится к одному уравнению:

$$2x - y - 5z = 0,$$

в чём убеждаемся непосредственно, если сократим на 2 второе уравнение. Решение системы будет

$$y = 2x - 5z,$$

где x и z могут принимать произвольные значения.

§ 3. Определители 3-го порядка. Рассмотрим систему трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Чтобы решить эту систему, исключим из уравнений (10) два неизвестных, например y и z, следующим образом. Умножим данные уравнения почленно на l, m, n и, сложив, определим введённые множители так, чтобы коэффициенты при y и z были равны нулю. Таким образом, сперва получим:

$$(a_1l + a_2m + a_3n)\,x + (b_1l + b_2m + b_3n)\,y + \\ + (c_1l + c_2m + c_3n)\,z = d_1l + d_2m + d_3n.$$

Положив

$$\left.\begin{aligned} b_1l + b_2m + b_3n = 0, \\ c_1l + c_2m + c_3n = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

получим уравнение

$$(a_1l + a_2m + a_3n)\,x = d_1l + d_2m + d_3n. \qquad (12)$$

Из уравнений (11) определим l, m, n с точностью до общего множителя; мы можем принять (§ 2):

$$l = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Внося эти значения в уравнение (12), получим в результате уравнение, содержащее одно неизвестное x:

$$\left\{a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} x = \\ = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{[1]}. \qquad (13)$$

[1] Полностью проведённое решение системы (10) см. в § 5 этой главы.

Коэффициент при x

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{14}$$

назовём *определителем 3-го порядка*, соответствующим квадратной таблице из девяти элементов:

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, \end{matrix} \tag{15}$$

и обозначим его символически так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Если заменить определители 2-го порядка их выражениями, то получим окончательно для определителя 3-го порядка следующее выражение:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3a_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \tag{16}$$

Можно указать простое правило составления последнего выражения. Для этого напишем таблицу (15), приписывая к ней справа ещё раз первый и второй столбцы.

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & \\ - & - & - & + & + & + \end{matrix} \tag{17}$$

Возьмём со знаком плюс произведение элементов, стоящих на главной диагонали определителя, а также произведения элементов, стоящих на двух параллелях к ней, содержащих по три элемента (на схеме (17) перечёркнуты сплошной линией). Произведения же элементов, стоящих на побочной диагонали и на двух параллелях к ней, содержащих по три элемента, возьмём со знаком минус (на схеме (17) перечёркнуты пунктиром). Алгебраическая сумма этих шести произведений даёт, как это усматриваем из выражения (16), определитель 3-го порядка, соответствующий квадратной таблице (15).

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Согласно определению (14) имеем:

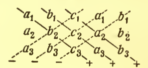
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= -14 - 11 - 2 = -27.$$

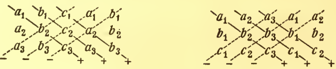
§ 4. Основные свойства определителей 3-го порядка. I. *При замене строк столбцами величина определителя не меняется (равноправность строк и столбцов).*

Это свойство может быть выражено так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Справедливость этого свойства легко проверить, вычисляя определители, стоящие в левой и правой частях равенства, согласно схеме (17):





В самом деле, мы усматриваем, что в обоих случаях элементы, перечёркнутые сплошной чертой, как и элементы, перечёркнутые пунктиром, будут давать одни и те же произведения. Следовательно, в определителе строки вполне равноправны со столбцами, и все остальные свойства будут иметь место как по отношению к строкам, так и по отношению к столбцам.

II. *При перестановке двух столбцов (или строк) определитель лишь меняет знак.*

Так, например, переставляя первый и второй столбцы, получим:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это свойство легко проверить, пользуясь схемой (17). Действительно, при перестановке двух столбцов элементы, перечёркнутые сплошной чертой, займут место элементов, перечёркнутых пунктиром, и обратно, что равносильно изменению знака определитеял,

III. *Определитель с двумя одинаковыми столбцами (или строками) равен нулю.*

В самом деле, с одной стороны, при перестановке одинаковых столбцов определитель не изменяется; с другой же стороны, в силу свойства II он должен переменить знак, т. е. если через Δ обозначим величину определителя, то $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$.

Чтобы установить дальнейшие свойства определителей, введём предварительно некоторые новые понятия. Если из определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

вычеркнуть одну строку и один столбец, на пересечении которых стоит некоторый элемент, то получится определитель 2-го порядка, который называется *минором* определителя Δ, соответствующим этому элементу. Так, например, минором определителя Δ, соответствующим элементу b_3, будет определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$. Условимся называть *алгебраическим дополнением* A некоторого элемента a соответствующий ему минор, взятый со знаком $+$ или $-$, смотря по тому, будет ли сумма номеров строки и столбца, которым принадлежит данный элемент, чётным или нечётным числом. Так, например, алгебраическое дополнение элемента b_3 будет

$$B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Располагая сумму, стоящую в правой части формулы (16), по элементам, например первого столбца, получим:

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

или

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3,$$

где A_i есть алгебраическое дополнение элемента a_i.

Легко проверить, что аналогичная формула имеет место и по отношению к любому столбцу, а значит, и к любой строке. Итак, получаем *разложение определителя по элементам некоторого ряда* (строки или столбца):

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, & \Delta &= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \\ \Delta &= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, & \Delta &= a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \\ \Delta &= c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3, & \Delta &= a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

где большими буквами обозначены алгебраические дополнения элементов, обозначенных малыми буквами.

Если в определителе Δ заменим, например, элементы первого столбца a_1, a_2, a_3 элементами второго столбца b_1, b_2, b_3, то при этой замене алгебраические дополнения A_1, A_2, A_3, не содержащие элементов первого столбца, не изменятся, а потому, если в правой части первой формулы (18) вместо a_1, a_2, a_3 подставить элементы b_1, b_2, b_3, то сумма будет равна определителю, у которого первый и второй столбцы одинаковы, т. е. будет равна нулю:

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0.$$

Поступая аналогично, получим из первых трёх формул (18) следующую группу формул:

$$\left.\begin{aligned} b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0, \quad & c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0, \\ a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0, \quad & c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 = 0, \\ a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 = 0, \quad & b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

а из последних трёх:

$$\left.\begin{aligned} a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0, \quad & a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0, \\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0, \quad & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = 0, \\ a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0, \quad & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (19')$$

Написанные формулы (18), (19) и (19') выражают следующее свойство определителя:

IV. *Сумма произведений элементов некоторого ряда (столбца или строки) на алгебраические дополнения этих элементов равна определителю, а сумма произведений элементов некоторого ряда (столбца или строки) на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда (столбца или строки) равна нулю.*

V. *Множитель, общий элементам некоторого ряда (столбца или строки), можно выносить за знак определителя.*

VI. *Определитель равен нулю, если все элементы некоторого его ряда (столбца или строки) равны нулю.*

Последние два свойства непосредственно вытекают из формул (18), определяющих разложение определителя по элементам одного из его рядов.

Столь же просто доказывается и следующее свойство.

VII. *Если элементы некоторого ряда (столбца или строки) представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, у которых элементы рассматриваемого ряда равны соответственным слагаемым.*

Это свойство, очевидно, распространяется на любое число слагаемых. Чтобы доказать это свойство, предположим, например, что

$$a_1 = a_1' + a_1'', \quad a_2 = a_2' + a_2'', \quad a_3 = a_3' + a_3''.$$

Подставляя эти выражения в первую из формул (13), получим:

$$\Delta = (a_1'A_1 + a_2'A_2 + a_3'A_3) + (a_1''A_1 + a_2''A_2 + a_3''A_3) = \Delta' + \Delta''.$$

Очевидно, Δ' представляет определитель, получающийся из определителя Δ, если в нём элементы первого столбца заменить через a_1', a_2', a_3'; определитель же Δ'' получится из определителя Δ после замены элементов первого столбца на a_1'', a_2'', a_3''.

VIII. *Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого ряда (столбца или строки) прибавить (или от них вычесть) элементы параллельного ряда (столбца или строки), предварительно умножив эти последние на один и тот же произвольный множитель l.*

В самом деле, заменим элементы, например первой строки, соответственно через $a_1 + la_2$, $b_1 + lb_2$, $c_1 + lc_2$. Вследствие последнего свойства полученный определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей. Первый из них будет иметь первую строку a_1, b_1, c_1, т. е. будет равен исходному определителю Δ. Первая же строка второго определителя будет la_2, lb_2, lc_2, и, вынося l за знак определителя (V), получим определитель с двумя одинаковыми строками; следовательно, второй определитель равен нулю (VI); вся же сумма равна исходному определителю Δ.

Пользуясь свойством VIII, можно все элементы некоторого ряда, кроме одного, сделать равными нулю, не изменяя при этом величины определителя. Разлагая затем определитель по элементам этого ряда, приведём данный определитель 3-го порядка к одному определителю 2-го порядка. Действительно, пусть в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

элемент a_1 отличен от нуля. Вычтем из элементов второго столбца элементы первого столбца, умножив их предварительно на $\frac{b_1}{a_1}$, и из элементов третьего столбца — элементы первого столбца, умноженные на $\frac{c_1}{a_1}$. При таких преобразованиях в силу свойства VIII величина определителя не изменится, и мы получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & m_2 & n_2 \\ a_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из элементов второго столбца элементы первого, умноженные на 2, а из элементов третьего столбца — элементы первого столбца, умноженные на 5, получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} = -8.$$

Непосредственное вычисление данного определителя путём разложения его по элементам некоторого ряда потребовало бы несколько бо́льших выкладок и сводилось бы к следующему. Применяя, например, первую из формул (18), получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(-23) - (-10) + 4\cdot 7 = -8.$$

§ 5. Система трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными. К понятию определителя 3-го порядка мы пришли, поставив задачу о решении системы трёх уравнений с тремя неизвестными. Возвращаясь к этой задаче, рассмотрим систему трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и предположим, что *определитель этой системы*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Умножим уравнения (20) почленно на A_1, A_2, A_3 и сложим. В силу формул (18) коэффициент при x будет равен Δ, а в силу формул (19) коэффициенты при y и z будут равны нулю. Поступая аналогично, исключим x и z, а также x и y. Таким образом, из системы (20) вытекает следующая система:

$$\left.\begin{aligned} x\Delta &= d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3, \\ y\Delta &= d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3, \\ z\Delta &= d_1C_1 + d_2C_2 + d_3C_3. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Легко показать и обратное, что система (20) есть следствие системы (21). В самом деле, умножая уравнения (21) почленно на a_1, b_1, c_1 и складывая, получим вследствие формул (18) и (19):

$$\Delta(a_1x + b_1y + c_1z) = d_1\Delta.$$

Сокращая на множитель Δ, отличный от нуля, получим первое из уравнений (20). Аналогично можно получить и остальные два уравнения.

Итак, мы показали, что системы (20) и (21) равносильны, если определитель Δ отличен от нуля. Из уравнений системы (21) находим:

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3}{\Delta},\quad y=\frac{d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3}{\Delta},\\ z=\frac{d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Сумма $d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3$ получается из суммы $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$, равной определителю Δ, заменой a_1, a_2, a_3 на d_1, d_2, d_3, т. е. эта сумма равна определителю, который получится из Δ, если в нём элементы первого столбца заменить на d_1, d_2, d_3. Аналогичное заключение имеет место относительно числителей в выражениях y и z. Таким образом, формулы (22) в более подробном виде запишутся так:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}, \qquad (22')$$

и мы приходим к следующему предложению: если определитель системы (20) отличен от нуля, то эта система имеет одно определённое решение, получаемое по формулам (22'). В знаменателе дробей, выражающих x, y, z, находится определитель Δ данной системы, а в числителях — определители 3-го порядка, которые получаются из Δ заменой коэффициентов при соответствующем неизвестном свободными членами (стоящими в правых частях).

Пример. Решить систему

$$2x-3y+z+1=0,\ x+y+z=6,\ 3x+y-2z=-1.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-23$$

отличен от нуля; следовательно, система имеет единственное решение. Согласно формулам (22') будем иметь:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1\\ 6 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1\\ 7 & 4 & 0\\ -3 & -5 & 0\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 4\\ -3 & -5\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-23}{-23}=1,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 6 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ -1 & 7 & 1\\ 7 & -3 & -2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 7\\ 7 & -3\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-46}{-23}=2,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&-3&-1\\1&1&6\\3&1&-1\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix}0&-5&-13\\1&1&6\\0&-2&-19\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-\begin{vmatrix}-5&-13\\-2&-19\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-69}{-23}=3.$$

§ 6. Однородная система. Перейдём теперь к исследованию системы однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}X_1\equiv a_1x+b_1y+c_1z=0,\\X_2\equiv a_2x+b_2y+c_2z=0,\\X_3\equiv a_3x+b_3y+c_3z=0,\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

причём для сокращения письма мы через X_1, X_2, X_3 обозначаем левые части уравнений. Исследование разобьём на три случая.

I. Если определитель Δ системы (23) отличен от нуля, то эта система будет иметь одно определённое решение согласно § 5. В нашем случае это будет очевидное решение $x=y=z=0$, которое называют *нулевым решением*.

II. Предположим, что определитель Δ системы (23) равен нулю, но по крайней мере один из его миноров отличен от нуля. Устанавливая надлежащим образом порядок уравнений и неизвестных в системе (23), можно всегда достигнуть того, чтобы минор, отличный от нуля, стоял в левом верхнем углу определителя Δ. Итак, не уменьшая общности, мы можем считать

$$\Delta=0;\quad \delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

Рассмотрим определитель

$$D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&X_1\\a_2&b_2&X_2\\a_3&b_3&X_3\end{vmatrix}.$$

Заменяя X_1, X_2, X_3 их выражениями, мы можем вследствие свойств V и VII (§ 4) представить определитель D в виде суммы трёх определителей:

$$D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&a_1\\a_2&b_2&a_2\\a_3&b_3&a_3\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}a_1&b_1&b_1\\a_2&b_2&b_2\\a_3&b_3&b_3\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}z.$$

Определители, стоящие при x и y, равны нулю, так как имеют по два одинаковых столбца, а определитель, стоящий при z, есть определитель Δ, равный нулю по условию, т. е. имеет место тождество относительно x, y, z:

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&X_1\\a_2&b_2&X_2\\a_3&b_3&X_3\end{vmatrix}=0.\tag{24}$$

Разлагая последний определитель по элементам последнего столбца, видим, что это тождество выражает линейную зависимость между X_1, X_2, X_3, причём коэффициент при X_3, очевидно, равен δ и заведомо отличен от нуля:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \delta X_3 = 0, \tag{24'}$$

где α_1 и α_2 суть алгебраические дополнения элементов X_1, X_2.

Это тождество показывает, что третье из уравнений (23) есть следствие первых двух. В самом деле, если при некоторых значениях x, y, z мы будем иметь $X_1 = X_2 = 0$, то из тождества (24') и условия $\delta \neq 0$ вытекает, что и $X_3 = 0$ для этих значений x, y, z.

Таким образом, в рассматриваемом случае остаётся решить совместно первые два уравнения системы (23). Согласно формулам (9) решение будет:

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$x = kA_3, \quad y = kB_3, \quad z = kC_3,$$

где k есть произвольный множитель. Если $k \neq 0$, то $z \neq 0$ и получаемое решение отлично от нулевого.

III. Предположим, наконец, что определитель Δ и все его миноры равны нулю. Не уменьшая общности, можем считать, что коэффициент a_1 отличен от нуля. Рассмотрим два определителя 2-го порядка:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_2 & X_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_3 & X_3 \end{vmatrix}.$$

Каждый из этих определителей можно представить в виде суммы трёх определителей (§ 4):

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} z.$$

Непосредственно видно, что определители, стоящие при x, равны нулю. Кроме того, равны нулю также и определители, стоящие при y и z, так как по условию все миноры определителя Δ равны нулю. Следовательно,

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 0.$$

Итак, в рассматриваемом случае будут иметь место два тождества относительно x, y, z:

$$\begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_2 & X_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_3 & X_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

или

$$a_1X_2 - a_2X_1 = 0, \quad a_1X_3 - a_3X_1 = 0. \tag{25'}$$

Эти тождества показывают, что последние два из уравнений (23) суть следствия первого. В самом деле, из тождеств (25′) и условия $a_1 \neq 0$ вытекает, что если $X_1 = 0$, то и $X_2 = X_3 = 0$. Итак, в рассматриваемом случае достаточно решить одно первое уравнение, и мы получим решение системы (23) в виде:

$$x = -\frac{b_1y + c_1z}{a_1},$$

а значения y и z остаются произвольными.

Резюмируя исследования этого параграфа, приходим к следующему предложению.

Для того чтобы однородная система (23) *имела решения, отличные от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю. Если этот определитель равен нулю, но по крайней мере один из его миноров отличен от нуля, то одно из уравнений системы есть следствие двух других. Если же не только определитель системы* (23), *но и все его миноры равны нулю, то система приводится к одному уравнению.*

Пример 1. Решить систему

$$2x - 3y + z = 0, \quad x + y + z = 0, \quad 3x + y - 2z = 0.$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23$$

отличен от нуля. Следовательно, данная система имеет единственное нулевое решение.

Пример 2. Решить систему

$$x + y + z = 0, \quad 3x - y + 2z = 0, \quad x - 3y = 0.$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Минор определителя Δ, например

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

отличен от нуля. Следовательно, третье уравнение данной системы есть следствие двух первых, и достаточно решить совместно два первых уравнения. Решая их, найдём (§ 2):

$$x=k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3k,\ y=k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=k,\ z=k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-4k,$$

где k произвольно.

Пример 3. Решить систему

$$x-y+z=0,\ 2x-2y+2z=0,\ 3x-3y+3z=0.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Все миноры определителя Δ тоже равны нулю. Следовательно, система приводится к одному уравнению, что непосредственно становится ясным, если сократить второе уравнение на 2 и третье на 3. Чтобы найти решения системы, достаточно разрешить лишь первое уравнение, и получаем:

$$y=x+z,$$

где x и z остаются произвольными.

§ 7. Общее исследование системы трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными. Обращаясь теперь к исследованию неоднородной системы

$$\left.\begin{aligned} X_1 &\equiv a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ X_2 &\equiv a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ X_3 &\equiv a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

рассмотрим отдельно ряд случаев.

I. Если определитель Δ этой системы отличен от нуля, то система эта имеет единственное решение, выражаемое формулами (22′) (§ 5).

II. Предположим, что определитель Δ равен нулю, но по крайней мере один из его миноров, за который мы можем принять, не уменьшая общности,

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

отличен от нуля. В этом случае, как мы видели в § 6, левые части уравнений (26) связаны линейной зависимостью (24). Отсюда вытекает, что если система (26) допускает решение, то и правые части d_1, d_2, d_3 уравнений этой системы должны удовлетворять той же линейной зависимости, т. е. должно быть:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=0.$$

Итак, случай II подразделяется на два:

II_1. Если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (26) несовместна, т. е. не имеет никакого решения.

II_2. Если же

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

то будут иметь место два равенства:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \delta X_3 = 0,$$
$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \delta d_3 = 0,$$

из которых первое выполняется тождественно относительно x, y, z, как это было установлено в § 6, а второе получается из данного условия разложением по элементам последнего столбца.

Вычитая из первого равенства второе, получаем тождество

$$\alpha_1 (X_1 - d_1) + \alpha_2 (X_2 - d_2) + \delta (X_3 - d_3) = 0,$$

откуда усматриваем, что третье из уравнений (26), а именно $X_3 - d_3 = 0$, есть следствие первых двух: $X_1 - d_1 = 0$, $X_2 - d_2 = 0$. Чтобы найти решение системы (26), остаётся решить совместно первые её два уравнения, которые можно переписать в виде:

$$a_1 x + b_1 y = d_1 - c_1 z,$$
$$a_2 x + b_2 y = d_2 - c_2 z.$$

Таким образом, решение этой системы, а следовательно, и системы (26), будет вида:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - c_1 z & b_1 \\ d_2 - c_2 z & b_2 \end{vmatrix}}{\delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 - c_1 z \\ a_2 & d_2 - c_2 z \end{vmatrix}}{\delta},$$

где z остаётся произвольным.

III. Пусть, наконец, определитель Δ и все его миноры равны нулю. Не уменьшая общности, можно считать $a_1 \neq 0$. В этом случае, как было показано в § 6, будут иметь место две линейные зависимости (25) между левыми частями уравнений (26). Если данная система допускает решение, то и правые части d_1, d_2, d_3 должны удовлетворять тем же зависимостям, а именно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

и случай III подразделяется на два:

III_1. Если хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то система (26) несовместна, т. е. не имеет решений.

III_2. Если же одновременно

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

то будут иметь место равенства:

$$a_1X_2 - a_2X_1 = 0, \quad a_1X_3 - a_3X_1 = 0,$$
$$a_1d_2 - a_2d_1 = 0, \quad a_1d_3 - a_3d_1 = 0,$$

из которых первые два выполняются тождественно относительно x, y, z, как это было установлено в § 6, а вторые два выражают условия разбираемого случая III_2.

Из последних равенств попарным вычитанием получаем:

$$a_1(X_2 - d_2) - a_2(X_1 - d_1) = 0,$$
$$a_1(X_3 - d_3) - a_3(X_1 - d_1) = 0,$$

откуда мы усматриваем, что последние два из уравнений (26) суть следствия первого уравнения.

Таким образом, система (26) приводится к одному первому уравнению; решая его относительно x, получим решение системы (26):

$$x = \frac{d_1 - b_1y - c_1z}{a_1},$$

где y и z остаются произвольными.

Резюмируя исследования настоящего параграфа, приходим к следующим предложениям:

Если определитель Δ *неоднородной системы* (26) *отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам* (22').

Если определитель Δ *равен нулю, но по крайней мере один из его миноров отличен от нуля, то система* (26) *либо несовместна, либо неопределённа. В первом случае среди определителей 3-го порядка, принадлежащих таблице*

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, \end{matrix} \qquad (27)$$

есть по крайней мере один, отличный от нуля, во втором случае все эти определители равны нулю, и система (26) *приводится к двум уравнениям.*

Если, наконец, вместе с определителем системы (26) *все его миноры равны нулю, то система* (26) *либо несовместна, либо неопределённа. В первом случае среди определителей 2-го порядка, принадлежащих таблице* (27), *есть хоть один, отличный от нуля, во втором же случае все определители 2-го порядка этой таблицы равны нулю, и система* (26) *приводится к одному уравнению.*

Пример 1. Решить систему

$$x+y+z=5, \quad x-y+z=1, \quad x+z=2.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

но среди его миноров есть отличный от нуля, например: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2$.
Среди определителей 3-го порядка таблицы

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 5, \\ 1, & -1, & 1, & 1, \\ 1, & 0, & 1, & 2 \end{matrix}$$

имеется определитель, отличный от нуля, например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2.$$

Следовательно, данная система не имеет решения, что непосредственно очевидно, если сложить первые два уравнения и сравнить результат с третьим уравнением.

Пример 2. Решить систему

$$x+y+z=5, \quad x-y+z=1, \quad x+z=3.$$

Определитель системы — тот же, что и в предыдущем примере, следовательно, $\Delta=0$, но среди его миноров есть отличный от нуля. Определители 3-го порядка таблицы

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 5, \\ 1, & -1, & 1, & 1, \\ 1, & 0, & 1, & 3 \end{matrix}$$

все равны нулю. Следовательно, данная система приводится к двум уравнениям, что непосредственно становится ясным, если сложим первые два уравнения.

Решая совместно первые два уравнения, получим:

$$x+z=3, \quad y=2, \quad \text{или} \quad x=3-z, \; y=2,$$

где z произвольно.

Пример 3. Решить систему

$$2x+y+z=4, \quad 4x+2y+2z=5, \quad 6x+3y+3z=10.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&1\\4&2&2\\6&3&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}2&1&1\\2&1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=0.$$

Все его миноры тоже равны нулю. Среди определителей 2-го порядка таблицы

$$\begin{matrix}2, & 1, & 1, & 4\\4, & 2, & 2, & 5\\6, & 3, & 3, & 10\end{matrix}$$

есть отличный от нуля, например $\begin{vmatrix}1&4\\2&5\end{vmatrix}=-3$. Следовательно, данная система несовместна, в чём убеждаемся непосредственно, умножив первое уравнение на 2 или на 3.

Пример 4. Решить систему

$$2x+y+z=4,\quad 4x+2y+2z=8,\quad 6x+3y+3z=12.$$

Определитель системы — тот же, что и в предыдущем примере; значит, $\Delta=0$ и все его миноры тоже равны нулю. Определители 2-го порядка таблицы

$$\begin{matrix}2, & 1, & 1, & 4,\\4, & 2, & 2, & 8,\\6, & 3, & 3, & 12\end{matrix}$$

все равны нулю. Следовательно, данная система приводится к одному уравнению, в чём непосредственно убеждаемся, если сократим второе уравнение на 2, а третье на 3. Остаётся решить первое уравнение, чтобы получить решение данной системы. Таким образом, находим:

$$z=4-2x-y,$$

где x и y произвольны.

§ 8. Некоторые приложения определителей к аналитической геометрии.

1. Площадь треугольника.

В гл. I, § 10 мы вычислили площадь S треугольника по координатам его вершин и получили формулу

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\x_2-x_3 & y_2-y_3\end{vmatrix},$$

которую можно переписать таким образом:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1-x_3 & y_1-y_3 & 0\\x_2-x_3 & y_2-y_3 & 0\\x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

Прибавляя к элементам первых двух строк элементы третьей строки, найдём окончательно:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Условие, при котором три точки лежат на одной прямой.

Если три данные точки находятся на одной прямой линии, то $S = 0$, и обратно. Следовательно, условием того, чтобы три данные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежали на одной прямой, будет

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Заменив в последнем условии (x_3, y_3) текущими координатами (x, y), получим уравнение первой степени:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

которое определяет прямую линию, проходящую через две данные точки: (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Эту задачу возможно также решить с помощью определителей, не прибегая к формуле для площади треугольника. Пусть уравнение искомой прямой линии будет $Ax + By + C = 0$. Так как эта прямая согласно условию должна проходить через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), то координаты последних должны удовлетворять уравнению прямой, т. е.

$$Ax_1 + By_1 + C = 0, \quad Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Итак, имеем три уравнения:

$$Ax + By + C = 0, \quad Ax_1 + By_1 + C = 0, \quad Ax_2 + By_2 + C = 0,$$

где x, y суть координаты любой точки нашей прямой. Эти уравнения являются однородными относительно неизвестных A, B, C. Эта система должна иметь решение, отличное от нулевого. Как мы знаем, необходимым и достаточным условием для этого является равенство нулю определителя системы, т. е.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Полученное уравнение первой степени относительно x, y изображает, очевидно, искомую прямую. Легко проверить, что координаты двух данных точек удовлетворяют составленному уравнению. Действительно, подставляя вместо x, y координаты данной точки, получим в левой части определитель с двумя одинаковыми строками, который, очевидно, равен нулю. Полученное уравнение можно рассматривать также, как условие того, что три точки (x, y), (x_1, y_1) (x_2, y_2) лежат на одной прямой.

4. Условие, при котором три прямые пересекаются в одной точке.

Пусть три данные прямые линии

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

пересекаются в одной точке (x_0, y_0). Координаты этой точки должны удовлетворять уравнениям данных прямых:

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0, \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2=0,$$
$$A_3x_0+B_3y_0+C_3=0.$$

Эти равенства показывают, что однородная система

$$A_1x+B_1y+C_1z=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z=0$$

имеет ненулевое решение $x=x_0$, $y=y_0$, $z=1$. Следовательно, определитель этой системы должен быть равен нулю, что и даёт нам искомое условие:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

Упражнения

1. Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

2. Решить системы:

а) $2x-z=1$, $2x+4y-z=1$, $x-8y-3z=-2$.
б) $x+y+z=a$, $x+(1+a)y+z=2a$, $x+y+(1+a)z=0$.
в) $x+y+z=0$, $2x-3y+4z=0$, $4x-11y+10z=0$.
г) $x+y+z=0$, $2x-3y+4z=0$, $5x-7y+8z=0$.
д) $x+y+z=2$, $2x-3y+4z=3$, $4x-11y+10z=5$.
е) $x-y+z=1$, $x+y-z=2$, $5x+y-z=7$.

3. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках (1, —2), (2, 3), (4, 5).

4. Лежат ли три точки (1, 1), (3, 3), (0, 0) на одной прямой?

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки (3, 2) и (—1, 3).

6. Найти высоту треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

7. Пользуясь решением предыдущего упражнения, найти площадь треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

8. Показать, что площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ равна

$$\pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y \end{vmatrix}\right].$$

При каком порядке обхода вершин выражение в скобках будет иметь знак +?

9. Упростить выражения:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};\quad \text{б)}\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & 1 \\ -\cos\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)}\ \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

11. Найти x из уравнений:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\qquad \text{б)}\ \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ -4 & x & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}=0;\qquad \text{в)}\ \begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}=0.$$

12. Доказать тождество:

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}=a(x-y)(y-z)(z-x).$$

ГЛАВА VII

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. Общее уравнение линии 2-го порядка. *Линией 2-го порядка называется линия, уравнение которой в декартовых координатах будет второй степени относительно текущих координат.* Общее уравнение второй степени с двумя переменными имеет вид:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (1)$$

Уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы являются частными случаями уравнения (1). Так, если

$$A=\frac{1}{a^2},\ B=0,\ C=-\frac{1}{b^2},\ D=0,\ E=0,\ F=-1,$$

то уравнение (1) обращается в уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Отсюда, естественно, возникает вопрос, не представляют ли уравнения вида (1) также какие-либо новые типы линий, кроме окружности, эллипса, гиперболы и параболы? При исследовании этого вопроса, ради симметрии формул, удобнее пользоваться иным обозначением коэффициентов уравнения (1), при котором уравнение (1) принимает следующий вид:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0\ ^{1)}. \qquad (1')$$

Пример. В уравнении $x^2-xy+y^2+2x-4y=0$ коэффициенты A, B, C, D, E, F имеют значения: $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=1$, $D=1$, $E=-2$, $F=0$.

§ 2. Преобразование общего уравнения линии 2-го порядка к новому началу координат. Посмотрим, какой вид примет уравнение (1′), если начало координат будет перенесено в произвольную точку $O_1(x_0,\ y_0)$ плоскости, направления же осей координат оста-

[1]) Из коэффициентов A, B и C хотя бы один должен отличаться от нуля, в противном случае уравнение (1′) не будет уравнением второй степени.

нутся прежними. Обозначая через X, Y текущие координаты относительно новой системы, мы должны в уравнении (1′) заменить x и y соответственно через $X+x_0$ и $Y+y_0$.

Делая указанную замену текущих координат, получаем:

$$A(X+x_0)^2+2B(X+x_0)(Y+y_0)+C(Y+y_0)^2+ \\ +2D(X+x_0)+2E(Y+y_0)+F=0.$$

Раскрывая скобки, собирая вместе члены с X и Y и располагая все члены по убывающим степеням новых текущих координат, найдём:

$$AX^2+2BXY+CY^2+2(Ax_0+By_0+D)X+2(Bx_0+ \\ +Cy_0+E)Y+Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=0.$$

Обозначим для краткости левую часть уравнения (1′) через U, её частную производную [1]) относительно x через U'_x и её частную производную относительно y через U'_y, т. е. положим

$$U=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F,$$
$$U'_x=2(Ax+By+D),$$
$$U'_y=2(Bx+Cy+E).$$

Введя такие обозначения, мы можем преобразованное уравнение написать в виде

$$AX^2+2BXY+CY^2+U'_{x_0}\cdot X+U'_{y_0}\cdot Y+U_0=0, \qquad (1'')$$

где U'_{x_0}, U'_{y_0}, U_0 обозначают результаты замены в выражениях U_x, U_y и U текущих координат посредством координат нового начала.

Итак, *при параллельном переносе начала координат в точку* (x_0, y_0) *совокупность трёх членов второго измерения в уравнении* (1′) *остаётся без изменения, свободный же член и коэффициенты при* X *и* Y *в преобразованном уравнении мы получим, если в левую часть данного уравнения и её частные производные относительно* x *и* y *подставим вместо текущих координат координаты* x_0, y_0 *нового начала.*

Пример. Дано уравнение линии 2-го порядка: $x^2-xy+y^2+x-y+2=0$. Каково будет уравнение этой линии, если начало координат перенести в точку (1, 1), сохраняя направления осей?

Здесь

$$U=x^2-xy+y^2+x-y+2, \quad U'_x=2x-y+1,$$
$$U'_y=-x+2y-1.$$

Следовательно, имеем:

$$U_0=3,\ U'_{x_0}=2,\ U'_{y_0}=0.$$

Преобразованное уравнение будет

$$X^2-XY+Y^2+2X+3=0.$$

---

[1]) Частной производной относительно x от функции двух переменных x и y называется её производная по отношению к x, если y принимается за постоянную. Аналогично составляется частная производная относительно y.

§ 3. Центр линии 2-го порядка. Точка M_0 называется центром симметрии или просто центром кривой 2-го порядка, если каждой точке M_1 этой кривой соответствует точка M_2 той же кривой такая, что хорда M_1M_2 проходит через точку M_0 и делится в ней пополам. Если в уравнении (1′) отсутствуют члены первого измерения, т. е. $D=E=0$, то начало координат есть центр линии.

Действительно, если какая-нибудь точка с координатами x и y лежит на данной линии, то её координаты удовлетворяют уравнению (1′). Но в данном случае тому же уравнению будут удовлетворять и $-x$ и $-y$, т. е. координаты точки, симметричной с первой относительно начала координат. Обратно, если начало координат есть центр линии 2-го порядка, то в уравнении этой линии отсутствуют члены первого измерения. В самом деле, предполагая начало координат в центре линии 2-го порядка, рассмотрим точки пересечения этой линии с прямой, проходящей через начало координат:

$$y=kx. \tag{2}$$

Координаты этих точек должны отличаться лишь знаками. Решая совместно уравнения (1′) и (2), подставим $y=kx$ в уравнение (1′). Получим квадратное уравнение

$$(A+2Bk+Ck^2)\,x^2+2\,(D+Ek)\,x+F=0,$$

корни которого являются абсциссами точек пересечения линии 2-го порядка с прямой (2) и, следовательно, должны отличаться только знаком. Отсюда сумма корней этого квадратного уравнения должна быть равна нулю. Так как сумма корней квадратного уравнения равна коэффициенту при среднем члене с обратным знаком, делённому на коэффициент при второй степени неизвестного, то

$$D+Ek=0.$$

При различных значениях k это требование может быть выполнено лишь в том случае, если $D=E=0$.

Таким образом, *для того чтобы начало координат было центром линии 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы в уравнении этой линии отсутствовали члены первого измерения относительно x и y.*

Возвращаясь теперь к общему уравнению (1′), покажем, как найти центр соответствующей линии. Перенесём начало координат в точку $O_1(x_0, y_0)$, сохраняя направления осей. Обозначая через X, Y текущие координаты относительно новой системы, напишем преобразованное уравнение согласно § 2 в виде

$$AX^2+2BXY+CY^2+U'_{x_0}\cdot X+U'_{y_0}\cdot Y+U_0=0. \tag{1″}$$

В новой системе координат точка O_1 является началом координат, а потому согласно доказанному условие того, чтобы эта точка была центром линии, может быть написано так:

$$U'_{x_0}=0,\ U'_{y_0}=0, \tag{3}$$

или в раскрытом виде:

$$Ax_0 + By_0 + D = 0, \quad Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \qquad (3')$$

Решая уравнения (3′) относительно x_0, y_0, мы получим координаты центра в старой системе координат. Отсюда вытекает следующее правило:

Чтобы получить систему уравнений, из которой определяются координаты центра линии 2-го порядка, нужно продифференцировать по x и y уравнение (1′) *этой линии.*

Из уравнения (1″) следует, *что при параллельном переносе начала координат в центр линии 2-го порядка совокупность трёх членов второго измерения уравнения* (1′) *остаётся без изменения, члены первого измерения исчезают, а свободный член есть результат подстановки в левую часть уравнения* (1′) *координат центра вместо текущих координат.*

Как мы видели, координаты центра линии 2-го порядка получаются при решении системы двух уравнений

$$Ax + By + D = 0, \quad Bx + Cy + E = 0. \qquad (3'')$$

Каждое из уравнений (3″) изображает прямую линию, и, таким образом, центр линии 2-го порядка является точкой пересечения этих прямых. Отсюда при решении системы уравнений (3″) могут встретиться три случая:

1. Две прямые (3″) пересекаются в одной точке в том и только в том случае, когда $AC - B^2 \neq 0$ (гл. III, § 10). При этом условии линия 2-го порядка имеет определённый центр. Такую линию назовём *центральной*.

2. Две прямые (3″) параллельны между собой и не совпадают, если $AC - B^2 = 0$, но свободные члены уравнений (3″) не пропорциональны коэффициентам при x и y. В этом случае линия 2-го порядка не имеет центра.

3. Две прямые (3″) совпадают; это будет тогда, когда одно из уравнений системы (3″) будет следствием другого, т. е. система приведётся к одному уравнению первой степени, что выражается условием

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}.$$

В этом случае линия 2-го порядка будет иметь *прямую центров*. Легко видеть, что линия 2-го порядка, представляющая совокупность двух параллельных (в частности, совпадающих) прямых (черт. 84), обладает прямою центров.

Черт. 84.

Пример. Уравнение линии 2-го порядка $x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y = 0$ преобразовать к центру.

Дифференцируя данное уравнение по x и y, получим уравнения (3″):

$$2x-y+2=0, \quad -x+2y-4=0.$$

Решая эти уравнения, найдём координаты центра: $x_0=0$, $y_0=2$. Перенося начало координат в центр линии 2-го порядка и сохраняя направления осей, получим преобразованное уравнение в новых координатах:

$$X^2-XY+Y^2-4=0,$$

так как совокупность членов второго измерения данного уравнения остаётся без изменения, члены первого измерения исчезают, а свободный член получается, если в левую часть данного уравнения вместо текущих координат подставить координаты центра $x_0=0$, $y_0=2$.

§ 4. Упрощение уравнения кривой 2-го порядка. Важным шагом в упрощении уравнения кривой 2-го порядка является такое преобразование координат, при котором в уравнении исчезает член с произведением переменных. Это достигается при помощи поворота координатных осей.

Пусть имеем уравнение кривой

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{1'}$$

где $B \neq 0$.

Повернём координатные оси на некоторый угол α, который выберем впоследствии.

Как известно, формулы преобразования координат имеют вид:

$$x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,$$
$$y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha.$$

Заменяя в данном уравнении x и y их выражениями по формулам преобразования, получим:

$$A(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)^2+2B(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)+$$
$$+C(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)^2+2D(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+$$
$$+2E(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)+F=0.$$

Раскрыв в этом уравнении скобки и сделав приведение подобных членов, будем иметь уравнение данной кривой в новых координатах в таком виде:

$$A_1x_1^2+2B_1x_1y_1+C_1y_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+F=0,$$

где для краткости положено:

$$A_1=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha,$$
$$B_1=(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),$$
$$C_1=A\sin^2\alpha-2B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha,$$
$$D_1=D\cos\alpha+E\sin\alpha,$$
$$E_1=-D\sin\alpha+E\cos\alpha.$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент B_1 обратился в нуль, т. е. чтобы

$$(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0. \tag{4}$$

Припомнив, что $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ и

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha,$$

перепишем уравнение (4), определяющее угол поворота α в таком виде:

$$(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0. \qquad (4')$$

Заметим, что $\sin 2\alpha \neq 0$, так как в противном случае, как видно из уравнения (4′), равнялось бы нулю и B, что противоречит условию. Поэтому уравнение (4′) можно разделить на $\sin 2\alpha$, после чего получим:

$$(C - A) + 2B\operatorname{ctg} 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}. \qquad (4'')$$

Таким образом, всегда можно выбрать угол α так, что после поворота координатных осей на этот угол в уравнении кривой 2-го порядка исчезнет член с произведением переменных.

Получив $\operatorname{ctg} 2\alpha$ по формуле (4″), мы воспользуемся известной из тригонометрии формулой

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}$$

и далее по формулам

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

найдём нужные нам для преобразования координат $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; а это позволит вычислить новые коэффициенты A_1, C_1, D_1 и E_1.

В результате преобразованное уравнение кривой примет вид:

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0, \qquad (5)$$

где все коэффициенты известны.

Если в уравнении вида (5) кривой 2-го порядка коэффициенты A_1 и C_1 одного знака, т. е. если $A_1 \cdot C_1 > 0$, то говорят, что это уравнение определяет кривую эллиптического типа; если же A_1 и C_1 разных знаков, т. е. если $A_1 \cdot C_1 < 0$, то говорят, что уравнение определяет кривую гиперболического типа и, наконец, если один из коэффициентов A_1 или C_1 равен нулю, т. е. $A_1 \cdot C_1 = 0$, то уравнение определяет кривую параболического типа.

Заметим, что одновременно коэффициенты A_1 и C_1 равняться нулю не могут, так как в противном случае уравнение (5) оказалось бы первой степени. Следовательно, уравнение кривой 2-го порядка вида (5) при любом выборе коэффициентов выражает кривую одного из трёх указанных типов.

Так как первоначальное уравнение (1′) и преобразованное (5) определяют одну и ту же кривую, то, естественно, тип кривой, определяемой уравнением (1′), определяется по уравнению (5).

Пример. Установить тип кривой, определяемой уравнением

$$x^2+xy+y^2-3x-6y+3=0.$$

Повернём оси координат на угол α, найдя $\operatorname{ctg}2\alpha$ по формуле (4″). В данном случае $A=1$, $C=1$ и $2B=1$. Следовательно, $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1-1}{1}=0$. Поэтому и $\cos 2\alpha=0$, откуда $\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Выберем у синуса нижний знак, а у косинуса — верхний, т. е. возьмём $\alpha=-45°$. Тогда формулы преобразования координат примут вид:

$$x=\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{y_1}{\sqrt{2}}, \quad y=\frac{-x_1}{\sqrt{2}}+\frac{y_1}{\sqrt{2}}.$$

Подставив выражения для x и y в данное уравнение, получим:

$$\left(\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{-x_1+y_1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{-x_1+y_1}{\sqrt{2}}\right)^2-$$
$$-3\left(\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}\right)-6\left(\frac{-x_1+y_1}{\sqrt{2}}\right)+3=0.$$

Произведя элементарные упрощения, будем иметь:

$$x_1^2+3y_1^2+3\sqrt{2}x_1-9\sqrt{2}y_1+6=0.$$

Здесь $A_1=1$ и $C_1=3$. Произведение их положительно. Следовательно, полученное уравнение, а потому и данное, определяют кривую эллиптического типа.

§ 5. Упрощение уравнений, определяющих кривые эллиптического и гиперболического типов[1]).

Пусть уравнение

$$A_1x_1^2+C_1y_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+F=0 \tag{5}$$

определяет кривую эллиптического или гиперболического типа, т. е. коэффициенты A_1 и C_1 отличны от нуля.

Легко убедиться, что эта кривая является центральной. Действительно, продифференцировав уравнение (5) по переменным x_1 и y_1 и заменив в левых частях полученных уравнений эти переменные координатами искомого центра x_0 и y_0 (см. § 3), получим систему уравнений относительно x_0 и y_0:

$$2A_1x_0+2D_1=0,$$
$$2C_1y_0+2E_1=0.$$

[1]) Для тех учебных заведений, где общая теория кривых 2-го порядка проходится в расширенном объёме, дано параллельно к основному тексту §§ 1—9 более подробное изложение этой теории, основанное на использовании инвариантов уравнений 2-го порядка.

В этом случае после ознакомления с §§ 1—4 следует непосредственно перейти к § 10 и дальнейшим, пропустив §§ 5—9.

Эта система всегда имеет определённое решение, так как по условию A_1 и C_1 отличны от нуля.

Отсюда координаты центра выразятся так:

$$x_0 = -\frac{D_1}{A_1},$$
$$y_0 = -\frac{E_1}{C_1}.$$

Перенесём начало координат в центр кривой. Координаты в новой системе обозначим через X и Y. Формулы преобразования примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X + x_0, \\ y_1 &= Y + y_0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

После замены в уравнении (5) переменных x_1 и y_1 их выражениями по формулам (6) коэффициенты при квадратах переменных, как известно из § 2, не изменятся, члены с первыми степенями пропадут, а свободным членом окажется результат подстановки в левую часть уравнения (5) вместо x_1 и y_1 — координат нового начала (центра кривой) x_0 и y_0. Обозначим этот результат через U_0. Таким образом, после указанного преобразования уравнения (5) получается уравнение центральной кривой в виде

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + U_0 = 0. \qquad (7)$$

Оно называется простейшим уравнением центральной кривой.

§ 6. Исследование простейшего уравнения, определяющего кривую эллиптического типа. Пусть уравнение

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + U_0 = 0 \qquad (7)$$

определяет кривую эллиптического типа, т. е. знаки коэффициентов A_1 и C_1 одинаковы. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что они положительны, так как в противном случае мы умножили бы уравнение на (-1) и тем самым сделали бы их положительными.

Рассмотрим различные возможности в отношении величины свободного члена U_0:

1) Пусть $U_0 < 0$. Тогда, перенеся этот член в правую часть и разделив уравнение на эту правую часть, получим:

$$\frac{A_1X^2}{-U_0} + \frac{C_1Y^2}{-U_0} = 1.$$

Введя обозначения $\frac{A}{-U_0} = \frac{1}{a^2}$ и $\frac{C_1}{-U_0} = \frac{1}{b^2}$, что возможно, так как A_1, C_1 и $-U_0$ положительны, будем иметь:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Но это есть уравнение эллипса. Следовательно, в данном случае уравнение (7) определяет эллипс (в частности, при $a=b$ — окружность).

2) Пусть $U_0=0$. При этом условии уравнение (7) будет иметь вид $A_1X^2+C_1Y^2=0$. Оба члена левой части уравнения при любых значениях X и Y, отличных от нуля, положительны. Поэтому уравнение удовлетворяется только нулевыми значениями переменных и, следовательно, определяет лишь одну точку.

3) Пусть $U_0>0$. В этом случае все члены левой части уравнения (7) при любых значениях X и Y не отрицательны, а третий положителен. Следовательно, нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы данному уравнению. Значит, уравнение не определяет никакой действительной линии, или, как говорят, ему соответствует мнимое место точек.

Пример 1. Упростить уравнение кривой эллиптического типа

$$x^2+3y^2+3\sqrt{2}x-9\sqrt{2}y+6=0.$$

При помощи параллельного сдвига осей отнесём кривую к центру. Для этого продифференцируем данное уравнение по x и y и в полученных уравнениях заменим x и y искомыми координатами центра x_0 и y_0. Будем иметь:

$$2x_0+3\sqrt{2}=0,$$
$$6y_0-9\sqrt{2}=0,$$

откуда

$$x_0=-\frac{3}{\sqrt{2}},$$
$$y_0=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Обозначим текущие координаты относительно новой системы через X и Y. Формулы преобразования примут вид:

$$x=X-\frac{3}{\sqrt{2}},\quad y=Y+\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Сделав подстановку выражений для x и y в данное уравнение, получим:

$$X^2+3Y^2-12=0,\ \text{откуда}\ \frac{X^2}{12}+\frac{Y^2}{4}=1.$$

Таким образом, данное уравнение определяет эллипс, большая полуось которого равна $2\sqrt{3}$, а малая 2.

Пример 2. Построить кривую по уравнению

$$x^2+xy+y^2-3x-6y+3=0.$$

Это уравнение уже встречалось в примере § 4, где при помощи поворота координатных осей на угол в $-45°$ оно было преобразовано к виду

$$x_1^2+3y_1^2+3\sqrt{2}x_1-9\sqrt{2}y_1+6=0.$$

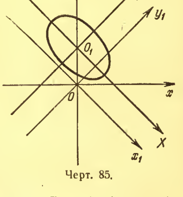
В примере первом настоящего параграфа это последнее уравнение путём переноса начала координат в точку $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ было приведено к виду

$$\frac{X^2}{12}+\frac{Y^2}{4}=1.$$

Таким образом, данное уравнение выражает эллипс.

Теперь задача сводится к тому, чтобы от первоначальных осей Ox и Oy перейти указанным путём к осям O_1X и O_1Y и в них построить эллипс по его каноническому уравнению (черт. 85).

Замечание. При исследовании уравнения центральной кривой практически удобнее сначала перенести начало координат в центр кривой, а потом повернуть оси.



Черт. 85.

§ 7. Исследование простейшего уравнения, определяющего кривую гиперболического типа. Пусть уравнение

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + U_0 = 0 \qquad (7)$$

определяет кривую гиперболического типа, т. е. знаки коэффициентов A_1 и C_1 различны. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что коэффициент A_1 положителен, а C_1 — отрицателен. Если бы было наоборот, то умножением уравнения на -1 мы изменили бы знаки у всех членов.

Рассмотрим случай, когда $U_0 \neq 0$. Перенесём этот член в правую часть и разделим уравнение на $-U_0$. Будем иметь:

$$\frac{A_1X^2}{-U_0} + \frac{C_1Y^2}{-U_0} = 1. \qquad (8)$$

Если U_0 отрицательно, то $-U_0$ положительно, и тогда можно ввести обозначения:

$$\frac{A_1}{-U_0} = \frac{1}{a^2} \quad \text{и} \quad \frac{C_1}{-U_0} = -\frac{1}{b^2}.$$

После этого уравнение (8) примет вид:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Как видно, в этом случае оно определяет гиперболу, действительной осью симметрии которой служит ось O_1X.

Если же U_0 положительно, то $-U_0$ отрицательно. Тогда можно ввести такие обозначения:

$$\frac{A_1}{-U_0} = -\frac{1}{a^2} \quad \text{и} \quad \frac{C_1}{-U_0} = \frac{1}{b^2}.$$

При этом уравнение (8) примет вид $-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, или

$$\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1.$$

Это — тоже уравнение гиперболы. Только действительная ось симметрии её совпадает с осью O_1Y.

Пусть $U_0 = 0$. В этом случае уравнение (7) представится так:

$$A_1X^2 + C_1Y^2 = 0.$$

Полагая $A_1 = m^2$ и $C_1 = -n^2$, перепишем его в таком виде:

$$m^2X^2 - n^2Y^2 = 0$$

или

$$(mX + nY)(mX - nY) = 0.$$

Но это уравнение распадается на два уравнения первой степени:

$$mX + nY = 0 \quad \text{и} \quad mX - nY = 0.$$

Каждое из них есть уравнение прямой, проходящей через начало координат.

Таким образом, при $U_0 = 0$ уравнение (7) определяет пару прямых, пересекающихся в начале координат.

§ 8. Исследование уравнения, определяющего кривую параболического типа. Пусть уравнение

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0 \qquad (5)$$

определяет кривую параболического типа.

Это значит, что один из коэффициентов A_1 или C_1 равен нулю. Допустим, что $C_1 = 0$. Следовательно, уравнение имеет вид:

$$A_1x_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0. \qquad (9)$$

Предположим, что $E_1 \neq 0$.

Тогда, разрешив уравнение относительно y_1, получим:

$$y_1 = \frac{A_1}{-2E_1}x_1^2 + \frac{D_1}{-E_1}x_1 + \frac{F}{-2E_1}. \qquad (9')$$

Введём обозначения $\frac{A_1}{-2E_1} = a$, $\frac{D_1}{-E_1} = b$ и $\frac{F}{-2E_1} = c$. При этих обозначениях уравнение (9′) перепишется так:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c.$$

Но уравнение такого типа было рассмотрено в § 6 главы V и там было установлено, что оно определяет параболу, ось симметрии которой параллельна оси ординат.

Если же в уравнении (9) $E_1 = 0$, то оно принимает вид $A_1x_1^2 + 2D_1x_1 + F = 0$. Разрешая его относительно x_1, получим:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-D_1 + \sqrt{D_1^2 - A_1F}}{A_1} \\ \text{и} \quad x_1 &= \frac{-D_1 - \sqrt{D_1^2 - A_1F}}{A_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Если $D_1^2 - A_1F > 0$, то правые части уравнений (10) действительны и каждое из них есть уравнение прямой, параллельной оси ординат.

Таким образом, в этом случае уравнению (5) будет соответствовать пара прямых, параллельных оси Oy_1.

При $D_1^2 - A_1F = 0$ эти прямые, очевидно, совпадут.

Наконец, если $D_1^2 - A_1F < 0$, то уравнениям (10) не будет соответствовать никакой геометрический образ на плоскости. В этом случае говорят, что они (и, следовательно, уравнение (5)) определяют мнимое место точек.

Следовательно, при $C_1 = 0$ и A_1, отличном от нуля, уравнение (5) определяет либо параболу, ось симметрии которой параллельна оси ординат, либо пару прямых (которые в частном случае могут и совпадать), параллельных той же координатной оси, либо же, наконец, мнимое место точек. Совершенно очевидно, что при условии $A_1 = 0$, а C_1 отлично от нуля, уравнение (5) будет определять параболу, ось симметрии которой параллельна оси абсцисс, или же пару прямых (в частном случае совпадающих), параллельных оси Ox_1, или же, наконец, мнимое место точек.

Пример. Построить кривую, определяемую уравнением

$$x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 3y - 2 = 0.$$

Составляем выражение $AC - B^2$. В данном случае это будет $1 \cdot 1 - 1$, т. е. нуль. Следовательно, кривая не является центральной (см. § 3).

Повернём оси координат на угол α, определяемый из равенства

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}.$$

В нашем примере это будет

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - 1}{2} = 0.$$

Отсюда заключаем, что и

$$\cos 2\alpha = 0.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+0}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-0}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В обоих случаях возьмём верхние знаки.

Формулы преобразования примут вид:

$$x = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad y = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}.$$

Внеся выражения для x и y в данное уравнение и упростив, получим:

$$2x_1^2 - 4\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}y_1 - 2 = 0.$$

Это уравнение выражает кривую параболического типа. Коэффициент при y_1 отличен от нуля. Следовательно, оно определяет параболу.

Перенесём начало координат в вершину её, координаты которой обозначим через x_0 и y_0.

Формулы преобразования будут

$$x_1 = X + x_0 \quad \text{и} \quad y_1 = Y + y_0.$$

Внеся эти выражения в преобразованное уравнение параболы, получим:

$$2(X + x_0)^2 - 4\sqrt{2}(X + x_0) + \sqrt{2}(Y + y_0) - 2 = 0.$$

Раскрыв скобки и собрав подобные члены, будем иметь:

$$2X^2 + (4x_0 - 4\sqrt{2})X + \sqrt{2}Y + (2x_0^2 - 4\sqrt{2}x_0 + \sqrt{2}y_0 - 2) = 0.$$

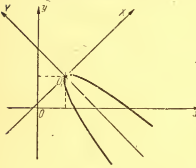
Приравнивая нулю коэффициент при X и свободный член, найдём координаты вершины x_0 и y_0 из уравнений

$$4x_0 - 4\sqrt{2} = 0,$$
$$2x_0^2 - 4\sqrt{2}x_0 + \sqrt{2}y_0 - 2 = 0.$$

Они будут

$$x_0 = \sqrt{2}, \quad y_0 = 3\sqrt{2}.$$

Уравнение параболы будет иметь вид: $X^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}Y$. По этому уравнению и построим кривую в осях O_1X и O_1Y (черт. 86).



Черт. 86.

§ 9. Результаты исследования общего уравнения второй степени. Результаты исследования общего уравнения линии 2-го порядка можно свести к следующему:

1. Каждое уравнение линии 2-го порядка принадлежит к одному из следующих трёх видов:

а) уравнение, определяющее кривую эллиптического типа,

б) уравнение, определяющее кривую гиперболического типа, и

в) уравнение, определяющее кривую параболического типа.

2. Уравнение кривой эллиптического типа определяет эллипс (в частном случае — окружность), одну точку или мнимое место точек.

3. Уравнение кривой гиперболического типа определяет гиперболу или пару пересекающихся прямых.

4. Уравнение кривой параболического типа определяет параболу, пару параллельных прямых (в частном случае совпадающих) или мнимое место точек.

§ 10. Два инварианта уравнения линии 2-го порядка. Прежде чем приступить к задаче упрощения уравнения линии 2-го порядка, покажем, что из старших коэффициентов A, B, C можно составить такие алгебраические выражения, которые не изменяются при любом преобразовании координат. Мы знаем, что при перенесении начала координат в любую точку плоскости совокупность трёх членов второго измерения уравнения (1') остаётся без изменения (§ 2), т. е. три старших коэффициента A, B, C остаются неизменными.

Но при повороте осей координат они изменяются. В § 4 было показано, что коэффициенты A_1, B_1 и C_1 старших членов уравнения, полученного

в результате поворота осей, выражаются через коэффициенты первоначального уравнения и угол поворота α по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha, \\ B_1 &= (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ C_1 &= A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Легко показать, что

$$A_1 + C_1 = A + C \quad \text{и} \quad A_1C_1 - B_1^2 = AC - B^2. \tag{12}$$

В самом деле, имеем:

$$A_1 + C_1 = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha) + (A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + {} + C\cos^2\alpha) = A(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + C(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = A + C,$$

так как

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Далее,

$$A_1C_1 - B_1^2 = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)(A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + {} + C\cos^2\alpha) - [(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]^2.$$

Раскрывая скобки, мы увидим, что исчезнут все члены, кроме членов, содержащих AC и $-B^2$, и у этих членов будет коэффициент

$$\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 = 1.$$

Следовательно, $A_1C_1 - B_1^2 = AC - B^2$, и оба равенства (12) доказаны.

Таким образом, мы видим, что сумма коэффициентов при квадратах координат в уравнении (1'), т. е. сумма $A + C$, а также выражение $AC - B^2$ остаются неизменными как при переносе начала координат, так и при повороте осей координат, т. е. при любом преобразовании координат.

Эти два выражения, составленные из коэффициентов уравнения (1'), называются *инвариантами уравнения линии 2-го порядка*. Инварианты имеют большое значение при изучении линии 2-го порядка; они представляют алгебраические функции от коэффициентов уравнения линии 2-го порядка, не зависящие от выбора осей координат, и поэтому служат аналитическим средством для выражения наиболее существенных геометрических свойств линии 2-го порядка — свойств, не зависящих от выбора осей координат. В § 3 мы уже видели, что рассмотрение инварианта $AC - B^2$ позволяет нам выделить среди линий 2-го порядка класс центральных линий.

В дальнейшем мы увидим другие важные приложения инвариантов уравнения линии 2-го порядка к исследованию этих уравнений, а также будем иметь случай познакомиться с третьим инвариантом, существенно отличным от рассмотренных в этом параграфе.

§ 11. Упрощение уравнения центральной линии 2-го порядка. Постараемся теперь надлежащим выбором осей координат по возможности упростить уравнение центральной линии 2-го порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1'}$$

где $AC - B^2 \neq 0$ и $B \neq 0$.

Перенося начало координат O в центр O_1 линии 2-го порядка, мы получим уравнение нашей линии в новых координатах:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + U_0 = 0, \tag{13}$$

где U_0 есть результат подстановки в левую часть уравнения (1') координат центра вместо текущих координат. С целью дальнейшего упрощения уравнения (13) повернём оси координат $x_1O_1y_1$ около их начала на угол α, определяемый из равенства

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}.$$

Как известно из § 4, при этом в уравнении кривой исчезнет член с произведением переменных и оно примет вид:

$$k_1X^2+k_2Y^2+U_0=0. \tag{14}$$

Здесь $A_1=k_1$, $C_1=k_2$, $B_1=0$. Равенства (12) дают:

$$k_1+k_2=A+C, \qquad k_1k_2=AC-B^2,$$

т. е. k_1 и k_2 суть корни квадратного уравнения

$$k^2-(A+C)k+(AC-B^2)=0. \tag{15}$$

Уравнение (14) является простейшим уравнением центральной линии 2-го порядка; из этого уравнения видно, что новые оси координат являются осями симметрии линии, ибо уравнение содержит только квадраты координат.

Резюмируя изложенное, мы приходим к следующему правилу.

Чтобы составить простейшее уравнение центральной линии 2-го порядка ($AC-B^2\neq 0$), *нужно*:

1. *Найти координаты центра из системы уравнений*

$$Ax+By+D=0, \qquad Bx+Cy+E=0.$$

2. *Вычислить* U_0, *подставляя найденные координаты центра вместо текущих координат в левую часть данного уравнения.*

Найти корни k_1 *и* k_2 *квадратного уравнения*

$$k^2-(A+C)k+(AC-B^2)=0$$

и, наконец, подставить найденные значения k_1, k_2 *и* U_0 *в уравнение*

$$k_1X^2+k_2Y^2+U_0=0.$$

В наших рассуждениях предполагалось, что в уравнении (1') коэффициент $B\neq 0$. Если же $B=0$, то уравнение (1') после переноса начала координат в центр кривой сразу приобретает вид $AX^2+CY^2+U_0=0$, т. е. становится простейшим.

Пример. Уравнение линии 2-го порядка

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0$$

привести к простейшему виду.

В данном случае

$$AC-B^2=1\cdot 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\neq 0,$$

т. е. линия — центральная. Для определения центра дифференцируем данное уравнение относительно x и относительно y:

$$2x-y+2=0, \qquad -x+2y-4=0.$$

Решая эти уравнения, находим координаты центра: $x_0=0$, $y_0=2$. Подставляя эти значения в левую часть данного уравнения вместо текущих координат, получим $U_0=-4$. Составим квадратное уравнение

$$k^2-(A+C)k+(AC-B^2)=0.$$

В нашем случае $A=C=1$, $B=-\frac{1}{2}$ и уравнение будет:

$$k^2-2k+\frac{3}{4}=0,$$

откуда

$$k_1=1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$k_2=1+\sqrt{1-\frac{3}{4}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, простейшее уравнение данной линии 2-го порядка будет:

$$\frac{1}{2}X^2+\frac{3}{2}Y^2-4=0,$$

или

$$X^2+3Y^2-8=0.$$

Замечание. Свободный член U_0 простейшего уравнения центральной линии 2-го порядка можно выразить через коэффициенты исходного уравнения при помощи весьма простой формулы и, таким образом, при составлении простейшего уравнения возможно не определять координат центра. Действительно, представим U_0 в виде

$$U_0=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=(Ax_0+By_0+D)x_0+\\+(Bx_0+Cy_0+E)y_0+Dx_0+Ey_0+F.$$

Заметив, что x_0, y_0 суть координаты центра и, значит, удовлетворяют условиям

$$Ax_0+By_0+D=0, \qquad Bx_0+Cy_0+E=0, \tag{3'}$$

получим:

$$U_0=Dx_0+Ey_0+F. \tag{16}$$

Решая систему уравнений (3'), найдём координаты x_0 и y_0 центра:

$$x_0=-\frac{\begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \qquad y_0=\frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

Внося эти выражения в формулу (16), получим:

$$U_0=D\frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}+E\frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}+F,$$

или, приводя к общему знаменателю:

$$U_0=\frac{D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}+E\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}+F\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

Выражение, стоящее в числителе, представляет собой разложение определителя 3-го порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \tag{17}$$

по элементам последней строки. Вследствие этого значение свободного члена U_0 определяется по формуле

$$U_0=\frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \tag{18}$$

Полагая для сокращения письма

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

перепишем формулу (18) таким образом:

$$U_0 = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{18'}$$

Возвращаясь к правилу, формулированному в начале этого параграфа, мы можем его изменить следующим образом.

Чтобы составить простейшее уравнение центральной линии 2-го порядка ($AC - B^2 \neq 0$), *нужно:*

1. *Найти корни* k_1 *и* k_2 *квадратного уравнения*

$$k^2 - (A + C)\,k + (AC - B^2) = 0.$$

2. *Подставить найденные значения* k_1, k_2 *в уравнение*

$$k_1X^2 + k_2Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

где положено

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Пример. Привести к простейшему виду уравнение линии 2-го порядка

$$x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y = 0.$$

Как мы видели в этом параграфе, для данного примера корни k_1 и k_2 имеют значения

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, простейшее уравнение данной линии 2-го порядка будет:

$$\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 + \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = 0.$$

Заметив, что

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

и

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4},$$

последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{1}{2}X^2+\frac{3}{2}Y^2-4=0, \text{ или } X^2+3Y^2-8=0.$$

§ 12. Исследование простейшего уравнения центральной линии 2-го порядка. Простейшее уравнение центральной линии 2-го порядка будет:

$$k_1X^2+k_2Y^2+U_0=0. \tag{14}$$

При выводе этого уравнения мы предполагали, что $AC-B^2\neq 0$. Рассмотрим теперь отдельно два случая.

1. $AC-B^2>0$. Так как $k_1k_2=AC-B^2$, то в этом случае k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки. Не уменьшая общности исследования, мы можем предполагать k_1 и k_2 положительными числами, так как в противном случае изменили бы знак во всех членах уравнения (14) на обратный. Сверх того, мы можем считать k_1 и k_2 выбранными так, что $k_1\leqslant k_2$.

Если в уравнении (14) свободный член U_0 равен нулю, то наше уравнение будет иметь вид:

$$k_1X^2+k_2Y^2=0. \tag{19}$$

Это уравнение удовлетворяется только при $X=Y=0$, т. е. ему соответствует точка.

Если $U_0<0$, то, перенося свободный член U_0 направо и разделив всё уравнение на эту правую часть, представим уравнение в виде

$$\frac{X^2}{\frac{-U_0}{k_1}}+\frac{Y^2}{\frac{-U_0}{k_2}}=1. \tag{20}$$

Так как по предположению $U_0<0$, то выражения, стоящие в знаменателях последнего уравнения, положительны. Обозначая их через a^2 и b^2, будем иметь:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\ (a\geqslant b),$$

т. е. в этом случае уравнение (10) определяет *эллипс* (в частности, при $a=b$ — окружность).

Если же $U_0>0$, то левая часть уравнения (14) положительна, и это уравнение не удовлетворяется ни при каких действительных значениях текущих координат X и Y. Следовательно, в этом случае уравнение (14) не определяет никакой действительной линии, или, как говорят, ему соответствует *мнимое место* точек.

2. $AC-B^2<0$. Так как $k_1k_2=AC-B^2$, то в рассматриваемом случае k_1 и k_2 имеют различные знаки. Не уменьшая общности исследования, можем предполагать k_1 положительным, а k_2 отрицательным, так как в противном случае изменили бы знаки у всех членов уравнения (14). Если $U_0=0$, то уравнение (14) будет:

$$k_1X^2+k_2Y^2=0.$$

Полагая $k_1=m_1^2$, $k_2=-n_1^2$, напишем это уравнение так:

$$m_1^2X^2-n_1^2Y^2=0,$$

или

$$(m_1X+n_1Y)(m_1X-n_1Y)=0.$$

Последнее уравнение распадётся на два уравнения первой степени:

$$m_1X+n_1Y=0;\quad m_1X-n_1Y=0.$$

Следовательно, в этом случае уравнение (14) определяет *совокупность двух прямых линий,* проходящих через новое начало координат, т. е. *две пересекающиеся прямые.*

Если же $U_0 \neq 0$, то, перенося свободный член U_0 в правую часть и деля всё уравнение (14) на эту правую часть, придадим ему вид (20).

В случае отрицательного знака у U_0 выражение $\frac{-U_0}{k_1}$ положительно, а выражение $\frac{-U_0}{k_2}$ отрицательно. Обозначая эти выражения соответственно через a^2 и $-b^2$, преобразуем уравнение (20) к виду

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. уравнение (14) определяет *гиперболу*, действительная ось которой совпадает с осью O_1X.

Наконец, в случае положительного знака у U_0 выражение $\frac{-U_0}{k_1}$ отрицательно, а выражение $\frac{-U_0}{k_2}$ положительно. Обозначая эти выражения соответственно через $-a^2$ и b^2, придадим уравнению (20) вид

$$-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. уравнению (14) по-прежнему соответствует *гипербола*, действительная ось которой совпадает уже с осью O_1Y.

Итак, резюмируя исследование, произведённое в этом параграфе, получаем:

1. $AC - B^2 > 0$ — *эллипс* (или *окружность*), *мнимое место* или *точка*. Кратко мы скажем, что при $AC - B^2 > 0$ уравнение определяет кривую *эллиптического типа*.

2. $AC - B^2 < 0$ — *гипербола* или *две пересекающиеся прямые линии*. Кратко мы скажем, что при $AC - B^2 < 0$ уравнение определяет кривую *гиперболического типа*.

Замечание. Проведём более детальное исследование простейшего уравнения центральной линии 2-го порядка, отправляясь от её уравнения

$$k_1X^2 + k_2Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{21}$$

где положено

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = k_1 + k_2 = A + C.$$

Согласно проведённому выше в этом параграфе плану, рассмотрим отдельно два случая:

I. $\delta > 0$. Так как $k_1k_2 = \delta$, то в этом случае k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки, и мы приходим к подразделению случая I на два:

I_1. k_1 и k_2 положительны, т. е. $\varepsilon > 0$.

I_2. k_1 и k_2 отрицательны, т. е. $\varepsilon < 0$.

Если в уравнении (21) свободный член $\frac{\Delta}{\delta}$ равен нулю, что будет лишь при условии $\Delta = 0$, то наше уравнение будет:

$$k_1X^2 + k_2Y^2 = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется только при $X = Y = 0$ (в обоих случаях I_1, I_2), т. е. ему соответствует точка.

Рассматривая случай I_1 и предполагая $\Delta < 0$, перенесём свободный член уравнения (21) направо и, разделив всё уравнение на эту правую часть, представим его в виде

$$\frac{X^2}{\frac{-\Delta}{k_1\delta}} + \frac{Y^2}{\frac{-\Delta}{k_2\delta}} = 1. \tag{20'}$$

Так как, по предположению, $\Delta < 0$, то выражения, стоящие в знаменателях последнего уравнения, положительны и, значит, обозначая их через a^2 и b^2, мы получим уравнение

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. в этом случае ($\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\Delta < 0$) уравнение (21) определяет эллипс (в частности, при $a = b$ — окружность).

Если же $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$, то все три члена уравнения (21) положительны и оно не удовлетворяется ни при каких действительных значениях текущих координат X, Y. Следовательно, при этих условиях уравнение (21) не определяет никакой действительной линии, или, как говорят, ему соответствует мнимое место точек.

Переходя к случаю I_2 ($\delta > 0$, $\varepsilon < 0$), мы, очевидно, придём к обратным заключениям: при $\Delta > 0$ — эллипс, при $\Delta < 0$ — мнимое место точек.

Объединяя оба случая I_1 и I_2, мы видим, что эллипс получается, когда ε и Δ — разных знаков, и мнимое место, если ε и Δ — одного знака.

Итак, если $\delta > 0$ и $\varepsilon\Delta < 0$ — эллипс,
если $\delta > 0$ и $\varepsilon\Delta > 0$ — мнимое место,
если $\delta > 0$ и $\Delta = 0$ — точка.

II. $\delta < 0$. Так как $k_1 k_2 = \delta$, то в рассматриваемом случае k_1 и k_2 имеют различные знаки. Если $\Delta = 0$, то уравнение (21) примет вид

$$k_1 X^2 + k_2 Y^2 = 0$$

и, как мы видели в основном тексте настоящего параграфа, распадётся на два уравнения первой степени. Следовательно, если $\delta < 0$ и $\Delta = 0$, то уравнение (21) определяет совокупность двух прямых линий, проходящих через новое начало координат, т. е. две пересекающиеся прямые.

Если же $\Delta \neq 0$, то, перенося свободный член $\frac{\Delta}{\delta}$ в правую часть и деля всё уравнение (21) на эту правую часть, придадим ему вид (20'). Так как k_1 и k_2 — разных знаков, то знаменатели в уравнении (20') имеют противоположные знаки и поэтому это уравнение определяет гиперболу.

Итак, если $\delta < 0$ и $\Delta \neq 0$ — гипербола,
если $\delta < 0$ и $\Delta = 0$ — две пересекающиеся прямые.

§ 13. Третий инвариант уравнения линии 2-го порядка. В § 10 мы доказали инвариантность двух выражений:

$$\varepsilon = A + C,\ \delta = AC - B^2$$

при любом преобразовании координат. Тем же свойством инвариантности обладает также определитель Δ, составленный из всех коэффициентов уравнения линии 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Чтобы это доказать, рассмотрим сначала центральную линию 2-го порядка с уравнением

$$U = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{22}$$

где предположено $\delta = AC - B^2 \neq 0$. Пусть выполнено любое преобразование координат, и уравнение нашей линии относительно преобразованной системы будет:

$$U_1 = A_1x_1^2 + 2B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F_1 = 0, \qquad (23)$$

где A_1, B_1, C_1 определяются согласно формулам (11) из § 10.

Покажем, что

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix},$$

или

$$\Delta = \Delta_1.$$

С этой целью приведём уравнения (22) и (23) к простейшим видам:

$$k_1X^2 + k_2Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \qquad (22')$$

и

$$k_1X^2 + k_2Y^2 + \frac{\Delta_1}{\delta} = 0. \qquad (23')$$

В последних уравнениях k_1, k_2 и δ имеют соответственно одинаковые значения, потому что δ и $\varepsilon = A + C$ по доказанному в § 10 суть инварианты, а k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения $k^2 - \varepsilon k + \delta = 0$. С другой стороны, уравнения (22') и (23') определяют одну и ту же линию 2-го порядка относительно общей системы координат и, следовательно, должны совпадать; отсюда следует, что

$$\Delta = \Delta_1.$$

Пусть теперь уравнения (22) и (23) определяют линию 2-го порядка относительно двух различных систем координат при условии $\delta = AC - B^2 = 0$. В этом случае A и C будут одинакового знака, и мы можем их считать положительными, изменив в противном случае знаки во всех членах данного уравнения.

Заменим A через $A' = A + \eta$ и C через $C' = C + \eta$, где η — любая положительная величина, сохраняя остальные коэффициенты неизменными. Тогда изменённое уравнение будет удовлетворять условию

$$\delta' = A'C' - B^2 = (A + \eta)(C + \eta) - B^2 = \varepsilon\eta + \eta^2 = \eta(\varepsilon + \eta) > 0,$$

и, следовательно, по вышедоказанному имеем:

$$\begin{vmatrix} A' & B & D \\ B & C' & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1' & B_1' & D_1' \\ B_1' & C_1' & E_1' \\ D_1' & E_1' & F_1' \end{vmatrix}, \quad \text{или } \Delta' = \Delta_1', \qquad (24)$$

где A_1', B_1', C_1' получаются из A', B, C' по тем же формулам (11) § 10, что и A_1, B_1, C_1 из A, B, C.

Равенство (24) имеет место при любом η, $\eta > 0$. Заставляя η стремиться к нулю и замечая, что при этом

$$A' \to A, \quad C' \to C, \quad A_1' \to A_1, \quad B_1' \to B_1, \quad C_1' \to C_1, \quad D_1' \to D_1,$$
$$E_1' \to E_1, \quad F_1' \to F_1,$$

получаем из (24) в пределе:

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}, \quad \text{или } \Delta = \Delta_1.$$

Таким образом, доказано, что определитель Δ представляет собой инвариант уравнения линии 2-го порядка как в случае $\delta \neq 0$, так и при $\delta = 0$. Другими словами, *уравнение любой линии 2-го порядка имеет три различных инварианта* ε, δ, Δ.

§ 14. Главные диаметры центральной линии 2-го порядка. Для построения центральной линии 2-го порядка в первоначальных координатных осях нужно знать расположение новых осей координат относительно прежних, т. е. нужно составить уравнения главных диаметров (осей симметрии) линии в старых координатах. Оба главные диаметра проходят через центр, координаты которого мы обозначаем через x_0 и y_0; следовательно, уравнения их имеют вид (гл. III, § 9):

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{25}$$

Займёмся определением углового коэффициента m для того главного диаметра, который принят за ось O_1X. Так как направление оси O_1X получено из направления старой оси OX путём поворота на угол α, то

$$m = \operatorname{tg} \alpha.$$

Этот тангенс мы найдём из двух первых формул (11) § 10, в которых нужно положить $A_1 = k_1$ и $B_1 = 0$.

Перепишем их в виде:

$$\begin{array}{r|l} \sin\alpha & A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha = k_1, \\ -\cos\alpha & -A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha = 0. \end{array}$$

Умножая первое уравнение на $\sin\alpha$, а второе на $-\cos\alpha$ и сложив почленно, получим:

$$B\cos\alpha + C\sin\alpha = k_1\sin\alpha, \text{ или } B\cos\alpha = (k_1 - C)\sin\alpha.$$

В § 4 было отмечено, что $\sin 2\alpha$ не может равняться нулю. Следовательно, не может равняться нулю и $\cos\alpha$. Поэтому на него можно разделить уравнение, после чего окончательно имеем:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{k_1 - C}.$$

Подставляя это значение в уравнение (25), получим *уравнение главного диаметра центральной линии 2-го порядка*, принятого за ось O_1X:

$$y - y_0 = \frac{B}{k_1 - C}(x - x_0). \tag{26}$$

Из условия перпендикулярности главных диаметров следует, что угловой коэффициент другого главного диаметра, принятого за ось O_1Y, будет $\frac{C - k_1}{B}$. Нетрудно доказать, что

$$\frac{C - k_1}{B} = \frac{B}{k_2 - C}.$$

В самом деле, это равенство можно записать так:

$$(C - k_1)(k_2 - C) = B^2, \text{ или } -k_1k_2 + C(k_1 + k_2) - C^2 = B^2.$$

Так как $k_1 + k_2 = A + C$ и $k_1k_2 = AC - B^2$, то последнее равенство приводится к виду

$$-(AC - B^2) + C(A + C) - C^2 = B^2,$$

что представляет тождество.

Таким образом, для второго главного диаметра, принятого за ось O_1Y, получаем уравнение, аналогичное (26), а именно:

$$y-y_0=\frac{B}{k_2-C}(x-x_0). \qquad (26')$$

Пример. Составить уравнения главных диаметров линии 2-го порядка

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0.$$

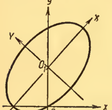
Как мы видели, центр этой линии имеет координаты $x_0=0$, $y_0=2$ (§ 3). Далее, в § 11 мы видели, что для этой линии $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=\frac{3}{2}$. Следовательно, уравнения главных диаметров этой линии будут:

$$y-2=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}(x-0)\ (\text{ось } O_1X),\quad y-2=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-1}(x-0)\ (\text{ось } O_1Y),$$

или

$$x-y+2=0 \text{ и } x+y-2=0.$$

§ 15. Построение центральной линии 2-го порядка. Чтобы построить центральную линию 2-го порядка в старых координатах, нужно привести её уравнение к простейшему виду и составить уравнения главных диаметров, принимаемых за новые оси координат. Построив новые оси координат по их уравнениям, вычерчиваем нашу линию по её простейшему уравнению.



Черт. 87.

Пример 1. Построить линию 2-го порядка

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0.$$

Здесь $AC-B^2=\frac{3}{4}>0$. Линия есть эллипс. В § 11 мы составили простейшее уравнение этой линии:

$$X^2+3Y^2-8=0, \text{ или } \frac{X^2}{8}+\frac{Y^2}{\frac{8}{3}}=1.$$

Уравнения новых осей O_1X и O_1Y, как мы видели в конце предыдущего параграфа, будут:

$$x-y+2=0\ (O_1X) \text{ и } x+y-2=0\ (O_1Y).$$

Построив оси O_1X и O_1Y, вычертим эллипс (черт. 87).

Пример 2. Построить линию 2-го порядка

$$2xy-4x-2y+3=0.$$

Здесь $AC-B^2=-1<0$, т. е. это — линия гиперболического типа. Чтобы найти её простейшее уравнение, определим сначала координаты центра. Дифференцируя данное уравнение по x и y, получим:

$$2y-4=0,$$
$$2x-2=0,$$

откуда $x_0=1$, $y_0=2$. Подставляя эти значения x_0 и y_0 в левую часть данного уравнения, найдём свободный член простейшего уравнения $U_0=-1$. Составим квадратное уравнение

$$k^2-(A+C)k+(AC-B^2)=0,$$

т. е. $k-1=0$, откуда $k_1=1$, $k_2=-1$. Простейшее уравнение будет

$$X^2-Y^2-1=0.$$

Чтобы построить нашу гиперболу, начертим сперва её главные диаметры. Уравнения главных диаметров будут:

$$y-2=\frac{1}{1-0}(x-1) \quad (\text{ось } O_1X),$$

$$y-2=\frac{1}{-1-0}(x-1) \quad (\text{ось } O_1Y),$$

или

$$x-y+1=0, \quad x+y-3=0;$$

кривая изображена на черт. 88.

Черт. 88.

§ 16. Исследование уравнения линии 2-го порядка, не имеющей определённого центра. Обратимся теперь к уравнению

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1')$$

в том случае, когда $AC-B^2=0$, или $AC=B^2$.

Из последнего условия видно, что A и C — одинакового знака, и мы можем считать их положительными [в противном случае мы изменили бы знаки во всех членах уравнения (1')]. Полагая $A=\alpha^2$, $C=\beta^2$, будем иметь:

$$B^2=\alpha^2\beta^2 \text{ и } B=\alpha\beta,$$

выбирая α и β с надлежащими знаками (т. е. если B положительно, α и β берём со знаком $+$; если B отрицательно, то α берём со знаком $+$, а β со знаком $-$). Введя эти обозначения вместо A, B, C, уравнение (1') запишем так:

$$\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

или

$$(\alpha x+\beta y)^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (27)$$

т. е. *в случае* $AC-B^2=0$ *трёхчлен второго измерения уравнения* (1') *выражает точный квадрат двухчлена* $\alpha x+\beta y$.

Чтобы упростить уравнение (27), повернём систему осей координат на угол φ, определяемый из условия $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\alpha}{\beta}$. Легко найти $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ по формулам:

$$\sin\varphi=\pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}, \quad \cos\varphi=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},$$

т. е. в данном случае

$$\sin\varphi=\mp\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \cos\varphi=\pm\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Выбор верхних или нижних знаков в этих формулах соответствует выбору положительного направления на новой оси абсцисс. Возьмём, например, верхние знаки. Формулы преобразования координат суть:

$$x=x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi=\frac{\beta x_1+\alpha y_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad y=x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi=\frac{-\alpha x_1+\beta y_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Прежде чем подставить эти значения x и y в данное уравнение (27), найдём выражения для $\alpha x+\beta y$ и $2Dx+2Ey+F$ в новых координатах x_1 и y_1. Очевидно, имеем:

$$\alpha x+\beta y=\alpha\frac{\beta x_1+\alpha y_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\beta\frac{-\alpha x_1+\beta y_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}y_1, \tag{28}$$

$$2Dx+2Ey+F=2D\frac{\beta x_1+\alpha y_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+2E\frac{-\alpha x_1+\beta y_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+F=$$
$$=2D_1x_1+2E_1y_1+F, \tag{29}$$

где положено

$$D_1=\frac{\beta D-\alpha E}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad E_1=\frac{\beta E+\alpha D}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \tag{30}$$

Пользуясь формулами (28) и (29), напишем данное уравнение (27) в новых координатах

$$(\alpha^2+\beta^2)y_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+F=0. \tag{27'}$$

Перенесём теперь, сохраняя направление осей, начало координат в точку $O_1(x_0, y_0)$, где x_0 и y_0 будут определены в дальнейшем. Формулы преобразования координат суть:

$$x_1=X+x_0,\quad y_1=Y+y_0.$$

Преобразованное уравнение немедленно получим, пользуясь правилом § 2; это уравнение будет вида

$$(\alpha^2+\beta^2)Y^2+2D_1X+2E_2Y+F_1=0, \tag{27''}$$

где положено

$$\left.\begin{aligned} E_2&=(\alpha^2+\beta^2)y_0+E_1,\\ F_1&=(\alpha^2+\beta^2)y_0^2+2D_1x_0+2E_1y_0+F. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Чтобы уравнение (27'') имело простейший вид, выберем x_0, y_0 так, чтобы в этом уравнении исчезли член с Y и свободный член. Для этого нужно определить x_0, y_0 из уравнений

$$E_2=0,\quad F_1=0,$$

или

$$\left.\begin{aligned} (\alpha^2+\beta^2)y_0+E_1&=0,\\ (\alpha^2+\beta^2)y_0^2+2D_1x_0+2E_1y_0+F&=0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Так как $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, то из первого уравнения (32) определим y_0; подставив найденное значение y_0 во второе уравнение (32), найдём x_0, если $D_1\neq 0$. Выбрав x_0, y_0 указанным образом, придадим уравнению (27'') следующий вид:

$$(\alpha^2+\beta^2)Y^2+2D_1X=0, \tag{27'''}$$

или

$$Y^2=2p_1X,$$

где

$$p_1=-\frac{D_1}{\alpha^2+\beta^2}\ \text{или}\ p_1=\frac{\alpha E-\beta D}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}. \tag{33}$$

Это уравнение определяет параболу, для которой новая ось абсцисс является осью симметрии (главным диаметром); другая ось координат касается параболы в вершине O_1. Параметр параболы $p=|p_1|$.

Итак, мы видим, что уравнение (1') в случае $AC-B^2=0$ определяет параболу. Однако вычисления становятся невыполнимыми, если $D_1=0$, так

как в этом случае нельзя определить x_0, y_0 из уравнений (32). Таким образом, остаётся исследовать, какой кривой соответствует уравнение (27), когда $D_1=0$. Последнее условие согласно первой из формул (30) равносильно предположению

$$\beta D-\alpha E=0.$$

Так как α и β одновременно не могут быть равны нулю, то мы вправе считать $\beta\neq 0$. Из последнего равенства получаем:

$$D=\frac{\alpha E}{\beta}.$$

Внося это значение D в уравнение (27), придадим ему вид:

$$(\alpha x+\beta y)^2+\frac{2E}{\beta}(\alpha x+\beta y)+F=0. \tag{27''''}$$

Считая в последнем уравнении $\alpha x+\beta y$ искомой величиной, определим эту последнюю посредством решения квадратного уравнения (27''''). Таким образом, получим:

$$\alpha x+\beta y=K_1;\quad \alpha x+\beta y=K_2, \tag{34}$$

где K_1 и K_2 суть постоянные числа.

В рассматриваемом частном случае уравнение (27) распадается на два уравнения первой степени (34). Рассмотрим отдельно три случая.

1. K_1 и K_2 суть мнимые числа. Уравнения (34) не удовлетворяются ни при каких действительных значениях x и y. Уравнение (27) определяет мнимое место точек (пару мнимых прямых (34)).

2. K_1 и K_2 суть действительные и различные числа. Уравнения (34) определяют пару параллельных прямых линий. Следовательно, уравнение (27) определяет линию 2-го порядка, распадающуюся на пару параллельных и несовпадающих прямых.

3. $K_1=K_2$. Уравнения (34) представляют две одинаковые прямые. Следовательно, уравнение (27) определяет две совпадающие прямые.

Итак, в случае $AC-B^2=0$ уравнение (1') изображает либо *параболу*, либо *пару параллельных прямых*. Кратко мы скажем, что при $AC-B^2=0$ уравнение изображает кривую *параболического типа*.

Замечание 1. Результаты произведённого исследования уравнения второй степени (1'), при условии $\delta=AC-B^2=0$, можно выразить с помощью коэффициентов этого уравнения, подобно тому как это было сделано в § 12 для случая $\delta\neq 0$. Пусть

$$\delta=AC-B^2=0 \text{ и } \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}=0.$$

Первое условие, как мы знаем, равносильно равенствам

$$A=\alpha^2,\ C=\beta^2,\ B=\alpha\beta.$$

Внося эти значения A, B, C в равенство $\Delta=0$, получим после разложения определителя по элементам последней строки:

$$D(\alpha\beta E-\beta^2 D)-E(\alpha^2 E-\alpha\beta D)=0,$$

или

$$\alpha^2E^2-2\alpha\beta DE+\beta^2D^2=0,$$

или

$$(\alpha E-\beta D)^2=0,$$

откуда $\alpha E=\beta D$ и, следовательно,

$$D=\frac{\alpha E}{\beta}.$$

Внося это значение D в данное уравнение (27), придадим ему вид:

$$(\alpha x+\beta y)^2+\frac{2E}{\beta}(\alpha x+\beta y)+F=0.$$

Из последнего уравнения мы заключили, что в этом случае линия 2-го порядка распадается на пару параллельных прямых (мнимых, действительных или сливающихся). Обратно, легко видеть, что если линия 2-го порядка распадается на пару параллельных прямых, то инварианты δ и Δ равны нулю. Действительно, пусть $\alpha x+\beta y=K_1$ и $\alpha x+\beta y=K_2$ суть уравнения параллельных прямых; тогда уравнение линии 2-го порядка будет:

$$(\alpha x+\beta y-K_1)(\alpha x+\beta y-K_2)=0,$$

откуда

$$A=\alpha^2,\ B=\alpha\beta,\ C=\beta^2,\ D=-\frac{\alpha}{2}(K_1+K_2),\quad E=-\frac{\beta}{2}(K_1+K_2),$$
$$F=K_1K_2$$

и определители $\delta=0$ и

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & -\frac{\alpha}{2}(K_1+K_2)\\ \alpha\beta & \beta^2 & -\frac{\beta}{2}(K_1+K_2)\\ -\frac{\alpha}{2}(K_1+K_2) & -\frac{\beta}{2}(K_1+K_2) & K_1K_2\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha\beta\begin{vmatrix}\alpha & \alpha & -\frac{\alpha}{2}(K_1+K_2)\\ \beta & \beta & -\frac{\beta}{2}(K_1+K_2)\\ -\frac{K_1+K_2}{2} & -\frac{K_1+K_2}{2} & K_1K_2\end{vmatrix},$$

т. е. $\Delta=0$, потому что последний определитель имеет два одинаковых столбца.

Итак, необходимые и достаточные условия распадения линии 2-го порядка на пару параллельных прямых будут:

$$\delta=0,\ \Delta=0.$$

В силу основного текста настоящего параграфа мы приходим к заключению:

если $\delta=0$, $\Delta\neq0$, то линия представляет собой параболу,

если $\delta=0$, $\Delta=0$, то линия распадается на пару параллельных прямых (мнимых, действительных или сливающихся).

Замечание 2. Формулу для параметра параболы можно также получить, пользуясь инвариантами. В самом деле, пусть $C_1Y^2+2D_1X=0$ есть простейшее уравнение параболы. Вычислим выражения ε, Δ по первоначальному уравнению параболы и, пользуясь их инвариантностью, получим:

$$C_1=\varepsilon,\quad \begin{vmatrix}0 & 0 & D_1\\ 0 & C_1 & 0\\ D_1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\Delta,\ \text{или}\ D_1^2C_1=-\Delta,$$

откуда

$$D_1^2=-\frac{\Delta}{\varepsilon}.$$

Заметив, что $p_1 = -\frac{D_1}{C_1}$, а параметр $p = |p_1|$, имеем:

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{\varepsilon^3}}. \qquad (33')$$

Легко показать, что формула (33') вытекает и из формулы (33) основного текста. В самом деле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & D \\ \alpha\beta & \beta^2 & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = D(E\alpha\beta - D\beta^2) - E(E\alpha^2 - D\alpha\beta) = -(E\alpha - D\beta)^2,$$

и, следовательно, $|E\alpha - D\beta| = \sqrt{-\Delta}$. Кроме того, $\alpha^2 + \beta^2 = \varepsilon$; поэтому из формулы (33) получим:

$$p = \frac{|E\alpha - D\beta|}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon^{3/2}} = \sqrt{-\frac{\Delta}{\varepsilon^3}}.$$

§ 17. Определение главного диаметра и вершины параболы. Возвращаясь к исследованию, произведённому в основном тексте § 16, мы видим, что уравнение оси симметрии параболы после поворота осей координат будет $y_1 = y_0$, где y_0 определяется первым из уравнений (32) и второй формулой (30), т. е.

$$y_0 = -\frac{E_1}{\alpha^2+\beta^2} = -\frac{\alpha D + \beta E}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}},$$

а y_1 связано со старыми координатами формулой (28), т. е.

$$y_1 = \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Внося выражения y_1 и y_0 в уравнение $y_1 = y_0$, мы получим уравнение главного диаметра параболы относительно первоначальной системы координат:

$$\alpha x + \beta y = -\frac{\alpha D + \beta E}{\alpha^2+\beta^2}$$

или

$$\alpha x + \beta y + \frac{\alpha D + \beta E}{\alpha^2+\beta^2} = 0. \qquad (35)$$

Чтобы найти координаты x_0, y_0 вершины параболы, очевидно, следует разрешить совместно систему уравнений (27) и (35), так как вершина есть точка пересечения параболы с её главным диаметром.

Пример. Составить уравнение главного диаметра параболы

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0$$

и определить её вершину.

Написав данное уравнение в виде $(x+y)^2 + 2x + y = 0$, заключаем, что

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad D = 1, \quad E = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, уравнение диаметра будет:

$$x + y + \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}}{1^2 + 1^2} = 0 \quad \text{или} \quad x + y + \frac{3}{4} = 0.$$

Решая совместно уравнения параболы и главного диаметра, найдём координаты вершины:

$$x+y=-\frac{3}{4},\quad 2x+y=-\frac{9}{16},$$

откуда $x_0=\frac{3}{16}$, $y_0=-\frac{15}{16}$.

§ 18. Упрощение уравнения параболы. Первый способ. Чтобы получить простейшее уравнение параболы, можно поступить следующим образом. Зная уравнение главного диаметра параболы

$$\alpha x+\beta y+\frac{\alpha D+\beta E}{\alpha^2+\beta^2}=0, \tag{35}$$

определяет координаты вершины, решая совместно уравнение (35) с данным уравнением параболы. Далее, так как угловой коэффициент главного диаметра параболы (новой оси абсцисс) есть $-\frac{\alpha}{\beta}$, то легко найти синус и косинус угла поворота φ новых осей координат, зная что $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\alpha}{\beta}$. Наконец, остаётся в данном уравнении параболы заменить текущие координаты по формулам преобразования координат

$$x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi+x_0;\quad y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi+y_0.$$

Пример. Привести к простейшему виду уравнение параболы

$$x^2+2xy+y^2+2x+y=0.$$

Как мы видели в конце предыдущего параграфа, уравнение главного диаметра этой параболы будет:

$$x+y+\frac{3}{4}=0,$$

а координаты её вершины суть: $x_0=\frac{3}{16}$, $y_0=-\frac{15}{16}$. В данном случае $\operatorname{tg}\varphi=-1$; следовательно, имеем:

$$\sin\varphi=\mp\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\varphi=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Возьмём, например, нижние знаки в этих формулах:

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

чем устанавливается положительное направление новой оси абсцисс.

Формулы преобразования координат суть:

$$x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi+x_0,\quad y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi+y_0.$$

В данном случае они примут вид:

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)+\frac{3}{16},\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)-\frac{15}{16}.$$

Подставляя эти значения x и y в данное уравнение параболы

$$(x+y)^2+2x+y=0,$$

получим:

$$\left(\sqrt{2}\,Y+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(X+3Y)-\frac{9}{16}=0,$$

или после упрощения:

$$2Y^2-\frac{X}{\sqrt{2}}=0, \quad \text{т. е.} \quad Y^2=\frac{\sqrt{2}}{4}X.$$

Второй способ. Пользуясь формулой (33) из § 16, определяем

$$p_1=\frac{\alpha E-\beta D}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}$$

и вносим найденное значение в простейшее уравнение параболы

$$Y^2=2p_1X.$$

Пример. Привести к простейшему виду уравнение параболы

$$x^2+2xy+y^2+2x+y=0$$

(тот же пример, что и разобранный выше в этом параграфе).

Здесь $\alpha=1$, $\beta=1$, $D=1$, $E=\frac{1}{2}$. Следовательно, по формуле (33) получаем:

$$p_1=\frac{1\cdot\frac{1}{2}-1\cdot 1}{(1^2+1^2)^{3/2}}=-\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{2}};$$

уравнение параболы примет вид:

$$Y^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}X.$$

Сравнивая с решением по первому способу, мы видим, что различие в знаке при p объясняется тем, что положительное направление на оси O_1X теперь выбрано противоположным первоначальному.

§ 19. Построение параболы. Чтобы построить параболу по её уравнению в старых координатах, нужно привести это уравнение к простейшему виду, как это было сделано в § 18. Зная уравнение главного диаметра (новой оси абсцисс), строим эту ось и отмечаем на ней вершину по координатам (x_0, y_0). Положительное направление новой оси абсцисс назначаем согласно той четверти, в которой лежит угол φ между старой и новой осями абсцисс.

При использовании формулы (33) для величины p_1 необходимо помнить, что этот угол φ следует брать в четвёртой или третьей четвертях, смотря по тому, будет ли β положительно или отрицательно. Это правило вытекает из вывода формулы (33) для p_1, произведённого в § 16, при котором мы приняли $\sin\varphi$ отрицательным, а знак $\cos\varphi$ совпадающим со знаком β. Затем проводим новую ось ординат через вершину перпендикулярно к главному диаметру параболы. Наконец, по простейшему уравнению вычерчиваем параболу.

Пример. Построить параболу

$$x^2+2xy+y^2+2x+y=0.$$

Как мы видели в предыдущем параграфе, простейшее уравнение нашей параболы будет:

$$Y^2=\frac{\sqrt{2}}{4}X.$$

Координаты вершины O_1 суть: $x_0=\frac{3}{16}$, $y_0=-\frac{15}{16}$, а уравнение главного диаметра (оси O_1X) будет:

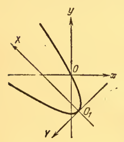
$$x+y+\frac{3}{4}=0,$$

причём положительное направление на оси O_1X мы выбрали так, что угол φ между осями Ox и O_1x лежит во второй четверти (так как $\sin\varphi>0$, $\cos\varphi<0$).

По этим данным строим новые оси координат и относительно них вычерчиваем параболу согласно её уравнению $Y^2=\frac{\sqrt{2}}{4}X$ (черт. 89).

Поступая по второму способу, получим простейшее уравнение параболы

$$Y^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}X.$$



Черт. 89.

Координаты вершины O_1 суть: $x_0=\frac{3}{16}$, $y_0=-\frac{15}{16}$, а уравнение главного диаметра (оси O_1X) будет

$$x+y+\frac{3}{4}=0,$$

причём положительное направление на оси O_1X мы всегда выбираем здесь согласно правилу, формулированному выше. В данном случае угол φ лежит в четвёртой четверти (так как $\sin\varphi<0$, $\cos\varphi>0$). По этим данным строим новые оси координат и относительно них вычерчиваем параболу согласно её уравнению $Y^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}X$ (на черт. 89 положительное направление оси O_1X направлено в другую сторону).

Упражнения

1. Найти центр кривой 2-го порядка, выражаемой уравнением

$$3x^2-7xy+5y^2+x-3y-3=0.$$

2. Найти центры кривых 2-го порядка, выражаемых уравнениями:
а) $x^2-y^2-4x-2y+1=0$; б) $5x^2-2xy+3y^2-2x+3y-6=0$;
в) $2x^2+5xy+2y^2-6x-3y+5=0$; г) $x^2+y^2-2x+3y-1=0$;
д) $9x^2-30xy+25y^2+8x-15y=0$; е) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$.

3. Показать, что прямая $7x+y+6=0$ проходит через центры кривых

$$3x^2-7xy-6y^2+3x-9y+5=0,$$
$$3x^2-5xy+6y^2+11x-17y+13=0.$$

4*. Найти уравнение кривой 2-го порядка, проходящей через точки (2, 3), (4, 2), (—1, —3) и имеющей центр в точке (0, 1).

5. Найти уравнение кривой 2-го порядка, центр которой лежит в точке (0, 2) и которая проходит через точки (1, 1), (2, 3), $\left(-4,-\frac{3}{2}\right)$.

6. Упростить уравнения следующих центральных кривых при помощи переноса начала координат: а) $x^2-y^2-2x+y=0$; б) $2x^2-3y^2-8x+12y-6=0$; в) $x^2-4y^2-2x-2y-2=0$.

7. Упростить уравнения следующих кривых при помощи поворота осей координат: а) $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$; б) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$; в) $4x^2 + 8xy - 2y^2 - 7 = 0$.

8*. Составить простейшее уравнение, а также построить кривую, выражаемую уравнением: а) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0$; б) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + y - 1 = 0$; в) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 6y - 13 = 0$.

9. Составить простейшие уравнения, а также построить кривые, выражаемые уравнениями:

а) $2xy - 4x - 2y + 3 = 0$;
б) $x^2 - 2y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$;
в) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
г) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$;
д) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
е) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
ж) $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$;
з) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;
и) $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$;
к) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18y - 18y + 9 = 0$;
л) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$;
м) $4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0$;
н) $40x^2 + 36xy + 25y^2 - 8x - 14y - 1 = 0$;
о) $2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = 0$;
п) $2x^2 - 5xy + 5x - 1 = 0$;
р) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0$.

10*. Определить вид и построить кривую, заданную уравнением

$$x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}.$$

11. По виду уравнения $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$ показать, что кривая есть эллипс.

12. По виду уравнения $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ показать, что кривая есть эллипс.

13. По виду уравнения $40x^2 + 36xy + 25y^2 - 8x - 14y - 1 = 0$ показать, что кривая есть эллипс.

14. Непосредственно показать, что уравнение $2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = 0$ определяет эллипс.

15. По виду уравнения $2xy - 4x - 2y + 3 = 0$ показать, что кривая есть гипербола.

16. По виду уравнения $x^2 - 2y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ показать, что кривая есть гипербола.

17. По виду уравнений $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$, $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$, $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$, $2x^2 - 5xy + 5y - 1 = 0$ показать, что они определяют гиперболы.

18. По виду уравнений $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$, $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$, $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$, $4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0$, $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0$ показать, что они представляют параболы.

19. По виду уравнения $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ показать, что оно определяет пару параллельных прямых.

20. Показать, что уравнение $2x^2 + xy - y^2 - 2x + 7y - 12 = 0$ определяет пару пересекающихся прямых.

21. Показать, что уравнение $x^2 + 4y^2 - 2x + 1 = 0$ определяет точку.

22. На основании вида уравнения $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 18x + 18y + 19 = 0$ показать, что оно определяет мнимое место точек.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

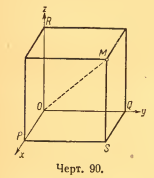
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА I

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Прямоугольные координаты. Укажем теперь способ, позволяющий определять положение любой точки пространства числами.

Через некоторую точку O пространства проведём три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz — *оси координат*, относительно которых мы будем определять положение точек пространства. Оси координат обычно располагают так, как это указано на черт. 90: оси Ox и Oy — горизонтально, а ось Oz — вертикально; при этом ось Ox направляют вперёд (в сторону читателя), ось Oy — слева направо, ось Oz — снизу вверх[1]). Ось Ox называется *осью абсцисс*, Oy — *осью ординат*, Oz — *осью аппликат* Точка пересечения координатных осей называется *началом координат*. Наконец, выберем единицу масштаба.



Черт. 90.

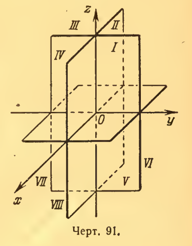
Теперь положение всякой точки пространства можно определить тремя действительными числами — координатами этой точки.

В самом деле, всякой точке M соответствует три точки P, Q, R на осях координат, являющиеся её проекциями на эти оси[2]). Обратно, зная точки P, Q и R на осях, можно построить единственную точку M в пространстве, для которой P, Q и R являются проекциями на координатные оси. Таким образом, определение положения точки M сводится к определению положений её проекций P, Q и R, лежащих соответственно на осях Ox, Oy и Oz. Мы уже знаем, что положение точки P оси Ox вполне определяется числом x, представляющим собой величину направленного отрезка $\overline{OP}$. Это число x, координата точки P — проекции точки M на ось Ox, — принимается

[1]) См. замечание 2 в конце этого параграфа.

[2]) Проекция точки M пространства на ось — это точка пересечения оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через M.

за первую координату точки M и называется её *абсциссой*. Совершенно так же положение точек Q и R вполне определяется числами y и z, представляющими собой величины направленных отрезков $\overline{OQ}$ и $\overline{OR}$. Числа y и z, координаты точек Q и R,— проекций точки M на оси Oy и Oz,— принимаются соответственно за вторую и третью координаты точки M. Вторая координата y называется *ординатой* и третья z — *аппликатой*.



Черт. 91.

Таким образом, положение любой точки M пространства вполне определяется тройкой чисел x, y, z, первое из которых является абсциссой точки, второе — ординатой и третье — аппликатой.

Координаты точки условимся записывать в скобках рядом с буквой, обозначающей её, ставя на первом месте абсциссу, на втором — ординату и на третьем — аппликату $M(x, y, z)$.

Оси координат Ox, Oy и Oz, взятые попарно, определяют три взаимно перпендикулярные плоскости xOy, yOz и zOx, называемые *плоскостями координат*. Эти три плоскости делят всё пространство на восемь частей, называемых октантами, причём точкам каждого октанта соответствует определённая комбинация знаков координат (черт. 91):

в	I	октанте	$x > 0$,	$y > 0$,	$z > 0$,
во	II	октанте	$x < 0$,	$y > 0$,	$z > 0$,
в	III	октанте	$x < 0$,	$y < 0$,	$z > 0$,
в	IV	октанте	$x > 0$,	$y < 0$,	$z > 0$,
в	V	октанте	$x > 0$,	$y > 0$,	$z < 0$,
в	VI	октанте	$x < 0$,	$y > 0$,	$z < 0$,
в	VII	октанте	$x < 0$,	$y < 0$,	$z < 0$,
в	VIII	октанте	$x > 0$,	$y < 0$,	$z < 0$.

Если точка M лежит в плоскости координат xOy, то $z=0$; аналогично для точек плоскости yOz координата $x=0$; для точек плоскости zOx координата $y=0$. Если точка M лежит на оси Ox, то $y=z=0$; аналогично для точек оси Oy координаты z и x равны нулю, для точек оси Oz координаты x и y равны нулю. Наконец, в начале координат $x=y=z=0$.

Координаты, которые принимаются в описанном способе для определения положения точки, называются *прямоугольными*, так как точка M определяется пересечением трёх плоскостей, пересе-

кающихся под прямыми углами (см. задачу II), и по имени Декарта — также *декартовыми*. Из описанного метода координат вытекает решение двух основных задач.

Задача I. *По данной точке M определить её координаты.*

Через данную точку M проводим три плоскости параллельно плоскостям координат; три точки P, Q и R, получающиеся в пересечении этих плоскостей с осями координат Ox, Oy и Oz и являющиеся проекциями точки M на эти оси, определяют три координаты:

$$x = \text{вел}\,\overline{OP}, \quad y = \text{вел}\,\overline{OQ}, \quad z = \text{вел}\,\overline{OR}.$$

Проведённые через точку M три плоскости вместе с тремя координатными плоскостями образуют прямоугольный параллелепипед, рёбра которого $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{OR}$ называются координатными отрезками точки M.

Задача II. *Зная координаты x, y и z точки M, построить эту точку.*

По трём данным числам x, y и z строим три точки P, Q и R на осях координат, откладывая соответственно по осям отрезки $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{OR}$, величины которых равны соответственно x, y и z. Проводя через точки P, Q и R три плоскости, параллельные плоскостям координат, в пересечении их получим единственную точку M, для которой x, y, z будут координатами.

Замечание 1. Если мы условимся рассматривать направленные отрезки $\overline{PS}$ и $\overline{SM}$ (черт. 90) как отрезки осей, направления которых совпадают с направлениями параллельных им координатных осей, то ордината точки M будет выражаться не только величиной отрезка $\overline{OQ}$, но и равной ей величиной отрезка $\overline{PS}$.

Аналогично аппликата точки M выразится как величиной отрезка $\overline{OR}$, так и величиной отрезка $\overline{SM}$.

Тогда при решении этих основных задач не является необходимым проводить плоскости, параллельные плоскостям координат. Так, в задаче I опускаем из данной точки M перпендикуляр на плоскость координат xOy. Его основание S (черт. 90) определит проекцию точки M на плоскость xOy. Из точки S опускаем перпендикуляр на ось Ox; его основание P определит проекцию точки M на ось Ox.

Следовательно, три звена направленной ломаной линии $\overline{OPSM}$ определяют три координаты точки M:

$$\text{вел}\,\overline{OP} = x, \quad \text{вел}\,\overline{PS} = y, \quad \text{вел}\,\overline{SM} = z.$$

Так же при решении задачи II откладываем по оси Ox от точки O отрезок длиною $|x|$ единиц (вперёд или назад — смотря по знаку x); через конец P этого отрезка проводим в плоскости xOy прямую параллельно оси Oy и откладываем на ней от точки P отрезок длиною $|y|$

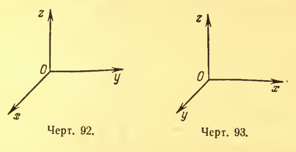
(вправо или влево — смотря по знаку y); получим точку S, через которую проводим прямую параллельно оси Oz и откладываем на ней от точки S отрезок длиною $|z|$ (вверх или вниз — смотря по знаку z). Конец этого отрезка и является искомой точкой M.

Направленные отрезки $\overline{PS}$ и $\overline{SM}$ (так же как и отрезки $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{OR}$) мы будем называть координатными отрезками точки M.

Направленную ломаную линию $\overline{OPSM}$, началом которой является начало координат, а концом — точка M, и три звена которой являются координатными отрезками точки M, будем называть координатной ломаной линией точки M.

Из всего изложенного следует, что каждой точке пространства в выбранной системе координат соответствует тройка чисел x, y, z — координат точки — и, обратно, всякая тройка действительных чисел x, y, z определяет в пространстве единственную точку, для которой указанные три числа являются соответственно абсциссой, ординатой и аппликатой. Поэтому задать точку — это значит задать её координаты; найти точку — значит найти её координаты.

Замечание 2. Возможны два типа взаимного расположения осей прямоугольной декартовой системы координат в пространстве. Если мы будем смотреть из какой-либо точки положительной полуоси Oz на положительную полуось Oy, то ось Ox может быть направлена вправо или влево. В первом случае система координат называется правой системой (черт. 92), а во втором — левой (черт. 93).



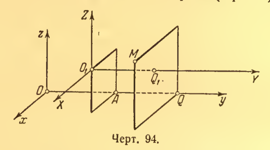
Черт. 92. Черт. 93.

Для правой системы поворот от оси Ox к оси Oy на прямой угол будет нам казаться происходящим против часовой стрелки (если смотреть на плоскость xOy из какой-либо точки положительной полуоси Oz), а для левой — по часовой. Можно пользоваться как правой, так и левой системами. В дальнейшем мы, как правило, будем применять правую систему координат.

§ 2. Основные задачи. Изложенный в § 1 метод координат приложим к решению многих задач. Рассмотрим сначала одну задачу вспомогательного характера, а затем (так же как и в первой части книги) разберём задачу о расстоянии между двумя точками и задачу о делении отрезка в данном отношении.

Задача I. *Зная координаты точки относительно некоторой системы, найти координаты той же точки относительно новой системы, оси которой параллельны прежним осям.*

Пусть координаты точки M относительно системы координат $Oxyz$ суть x, y и z. Возьмём другую систему координат O_1XYZ, оси которой O_1X, O_1Y и O_1Z соответственно параллельны осям Ox, Oy и Oz и направлены в те же стороны (черт. 94). Координаты



Черт. 94.

точки O_1 — нового начала — в старой системе пусть будут a, b и c. Обозначим через X, Y и Z координаты точки M в новой системе. Спрашивается, как связаны между собой координаты точки M в старой и новой системах? Пусть A — проекция точки O_1 на ось Oy, а Q и Q_1 — проекции точки M соответственно на оси Oy и O_1Y[1]. Тогда (ч. 1, гл. I, § 1)

$$\text{вел}\,\overline{OQ} = \text{вел}\,\overline{OA} + \text{вел}\,\overline{AQ} = \text{вел}\,\overline{OA} + \text{вел}\,\overline{O_1Q_1},$$

или

$$y = b + Y. \tag{1}$$

Совершенно так же, проектируя точки O_1 и M на оси Ox и Oz, найдём:

$$x = a + X, \tag{2}$$

$$z = c + Z. \tag{3}$$

Полученные формулы позволяют, зная X, Y и Z, найти x, y и z. Чтобы, обратно, зная x, y и z, найти новые координаты X, Y и Z, нужно разрешить уравнения (2), (1) и (3) относительно X, Y и Z. Будем иметь:

$$X = x - a, \quad Y = y - b, \quad Z = z - c. \tag{4}$$

Задача II. *Найти расстояние между двумя данными точками.*

Если точка M имеет координаты x, y и z, то её расстояние от начала координат представляет длину диагонали прямоугольного

[1]) Вывод формулы проведён для координаты y, так как в этом случае чертёж наиболее нагляден.

параллелепипеда, три измерения которого суть $|x|, |y|$ и $|z|$ (черт. 90). Следовательно, обозначая через d искомое расстояние, имеем:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

откуда

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{5}$$

т. е. *расстояние точки* $M(x, y, z)$ *от начала координат равно квадратному корню из суммы квадратов координат этой точки.*

Пусть теперь даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$; чтобы найти расстояние между ними, перенесём начало координат в точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, сохраняя направления осей. Относительно новых осей координаты точки M_1 будут (0, 0, 0), а координаты точки M_2 определятся формулами (4): $M_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Следовательно, по формуле (5) получим:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{6}$$

т. е. *расстояние между двумя точками* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *равно квадратному корню из суммы квадратов разностей одноимённых координат этих точек.*

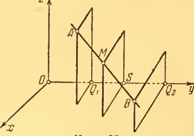
Пример. Найти расстояние между точкой $M_1(1, 2, 3)$ и точкой $M_2(-1, 2, -2)$.

Искомое расстояние по формуле (6) будет $d = \sqrt{2^2 + 0 + 5^2} = \sqrt{29}$.

Задача III. *Найти координаты точки M, делящей данный отрезок $\overline{AB}$ в данном отношении.*

Пусть заданы две точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и дано отношение λ, в котором некоторая точка $M(x, y, z)$ делит направленный отрезок $\overline{AB}$:

$$\lambda = \frac{\text{вел}\,\overline{AM}\,^{1)}}{\text{вел}\,\overline{MB}}. \tag{7}$$



Черт. 95.

Найдём координаты точки M.

Пусть Q_1, S, Q_2 суть проекции точек A, M, B на ось Oy (см. черт. 95). Тогда $AM : MB = Q_1S : SQ_2$, так как отрезки двух прямых, заключённые между параллельными плоскостями, пропорциональны.

Легко заметить, что величины направленных отрезков $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{Q_1S}$ и $\overline{SQ_2}$ удовлетворяют аналогичному равенству

$$\frac{\text{вел}\,\overline{AM}}{\text{вел}\,\overline{MB}} = \frac{\text{вел}\,\overline{Q_1S}}{\text{вел}\,\overline{SQ_2}}. \tag{8}$$

[1]) Подробно постановку задачи см. ч. I, гл. I, § 6.

Так как

$$\text{вел}\,\overline{Q_1S}=y-y_1,\qquad \text{вел}\,\overline{SQ_2}=y_2-y$$

(ч. 1, гл. I, § 3) и, по условию,

$$\frac{\text{вел}\,\overline{AM}}{\text{вел}\,\overline{MB}}=\lambda,$$

то равенство (8) примет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda,$$

откуда

$$y-y_1=\lambda(y_2-y),\quad \text{или}\quad y-y_1=\lambda y_2-\lambda y,$$

т. е.

$$y+\lambda y=y_1+\lambda y_2.$$

Вынося в левой части y за скобку, получим:

$$y(1+\lambda)=y_1+\lambda y_2$$

и, наконец,

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{9}$$

Чтобы найти координаты x и z искомой точки M, проектируем точки A, M, B на оси Ox и Oz и аналогично получаем:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \tag{10}$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{11}$$

Полагая в полученных формулах $\lambda=1$, найдём координаты середины отрезка

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}, \tag{12}$$

т. е. *координаты середины отрезка равны полусуммам координат его начала и конца.*

Пример. Найти координаты точки M, делящей отрезок $\overline{AB}$ между точками $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, 2, 3)$ в отношении $1:2$.

Здесь $x_1=1$, $y_1=2$, $z_1=3$, $x_2=-1$, $y_2=2$, $z_2=3$ и $\lambda=\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$x=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},\qquad y=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=2,\qquad z=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=3.$$

§ 3. Основные положения теории проекций в пространстве. Предварительно мы уточним понятие угла между двумя осями в пространстве.

Рассмотрим две оси l_1 и l_2, пересекающиеся в точке S. Угол между ними условимся понимать как угол, на который нужно повернуть одну из них вокруг точки S, чтобы её положительное

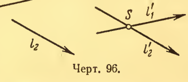
направление совпало с положительным направлением другой оси (поворот производится в плоскости, определяемой осями).

Угол условимся брать лишь в границах от 0 до π, не различая порядка, в котором указаны оси (если не сделано дополнительных указаний). Поэтому угол между осями l_1 и l_2 будем обозначать или $(\widehat{l_1, l_2})$ или $(\widehat{l_2, l_1})$.

Заметим, что угол между двумя осями на плоскости мы брали со знаком (знак выбирался в зависимости от направления поворота: по или против движения стрелки часов). Однако в пространстве направление поворота от одной из осей до другой зависит от того, с какой стороны мы будем смотреть на плоскость, определяемую данными пересекающимися прямыми. Поэтому в пространстве мы условились не различать порядок, в котором заданы оси, и угол брать в границах от 0 до π.

Мы предполагали, что данные оси имеют общую точку.

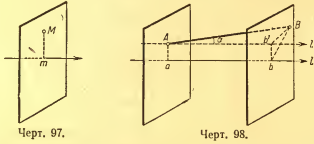
Рассмотрим теперь две непересекающиеся оси l_1 и l_2 (черт. 96); выберем произвольную точку S пространства и проведём через неё две оси l_1' и l_2', соответственно параллельные осям l_1 и l_2 и одинаково с ними направленные; углом между непересекающимися осями l_1 и l_2 мы будем считать угол между осями l_1' и l_2'.



Черт. 96.

Угол между осью и направленным отрезком в пространстве условимся понимать как угол между этой осью и осью, положительное направление которой совпадает с направлением данного отрезка.

Аналогично углом между двумя направленными отрезками будем считать угол между осями, положительные направления которых совпадают соответственно с направлениями данных отрезков.



Черт. 97. Черт. 98.

Основные положения теории проекций (часть 1, гл. I, § 8) легко переносятся на пространство. Как уже было сказано, проекцией точки M пространства на ось называется точка m, получаемая в пересечении оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку M (черт. 97). Определение проекции направленного отрезка на ось остаётся тем же, что и на плоскости: $\text{пр}_l\, \overline{AB} = \text{вел}\, \overline{ab}$ (черт. 98).

Как и в случае плоскости, проекция направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось l равна произведению длины AB проектируемого отрезка на косинус угла α между осью проекций и данным отрезком:

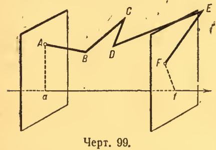
$$\text{пр}_l \overline{AB} = AB \cdot \cos\alpha. \tag{13}$$

Для доказательства этой формулы в случае пространства проведём через начало A отрезка $\overline{AB}$ вспомогательную ось l' (черт. 98), параллельную оси l и имеющую то же положительное направление. Очевидно, $\text{пр}_l \overline{AB} = \text{пр}_{l'} \overline{AB}$, а угол α между осью l и отрезком $\overline{AB}$ равен углу между осью l' и этим отрезком. Теперь можно воспользоваться справедливостью доказываемой формулы при расположении направленного отрезка и оси l' в одной плоскости. Остаётся ещё заметить, что хотя угол α между осью и отрезком на плоскости мы брали со знаком $+$ или $-$, а также допускали значения угла, бо́льшие по абсолютной величине, чем π, но всегда можно выбрать этот угол по абсолютной величине не превосходящим π; кроме того, можно заменить угол в формуле (13) его абсолютной величиной, что не влияет на значение косинуса. Таким образом, угол в этой формуле достаточно брать в границах от 0 до π, что находится в соответствии с определением угла для пространственного случая.

Так же легко проверить, что если рассматриваемый направленный отрезок $\overline{AB}$ расположен на некоторой оси u, то его проекция на ось l и в случае пространства будет равна произведению величины отрезка на косинус угла φ между осями l и u:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = \text{вел}\, \overline{AB} \cdot \cos\varphi. \tag{14}$$

Определение направленной ломаной и её проекции на ось остаётся таким же, как и для плоскости. На черт. 99 $\text{пр}\, \overline{ABCDEF} = \text{вел}\, \overline{af}$. Как и раньше, проекция ломаной равна сумме проекций её звеньев. Проекция ломаной не зависит от её формы, а зависит лишь от положения начальной и конечной точек. Проекция ломаной равна проекции её замыкающего отрезка. Проекция замкнутой ломаной равна нулю.



Черт. 99.

§ 4. Вычисление угла между двумя осями в пространстве.

Рассмотрим некоторую ось l в пространстве, и пусть α, β, γ суть углы, которые она образует с осями координат (черт. 100).

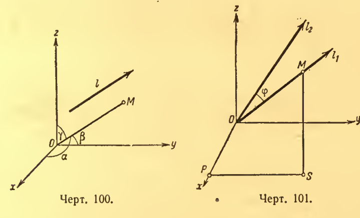
Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ назовём ***направляющими косинусами*** этой оси. Направляющие косинусы не независимы между собой, они связаны одним соотношением. Чтобы получить это соотношение,

проведём через начало координат отрезок $\overline{OM}$, длина которого равна единице, а направление совпадает с положительным направлением оси l. Проекции этого отрезка на оси координат (они, очевидно, являются координатами точки M) будут $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$. По формуле (5) расстояния точки M от начала координат имеем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{15}$$

т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов любой оси равна* 1.

Найдём выражение для косинуса угла между двумя осями. Рассмотрим две оси l_1 и l_2, проходящие через начало координат (черт. 101);



Черт. 100. Черт. 101.

пусть α_1, β_1, γ_1 — углы, которые образует ось l_1 с координатными осями, и α_2, β_2, γ_2 — углы оси l_2 с координатными осями. Возьмём на оси l_1 точку M на расстоянии OM, равном 1, от начала координат (координаты точки M суть $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$), и спроектируем координатную ломаную $\overline{OPSM}$ точки M на ось l_2. Так как проекция ломаной равна проекции замыкающего отрезка, то пр $\overline{OPSM} =$ $=$ пр $\overline{OM} = 1 \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$. С другой стороны, проекция ломаной равна сумме проекций её звеньев, т. е.

$$\text{пр}\,\overline{OPSM} = \text{пр}\,\overline{OP} + \text{пр}\,\overline{PS} + \text{пр}\,\overline{SM},$$

или, что то же самое:

$$\text{пр}\,\overline{OP} + \text{пр}\,\overline{PS} + \text{пр}\,\overline{SM} = \text{пр}\,\overline{OM} = \cos\varphi.$$

Так как

$$\text{пр}\,\overline{OP} = \text{вел}\,\overline{OP} \cdot \cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2,$$
$$\text{пр}\,\overline{PS} = \text{вел}\,\overline{PS} \cdot \cos\beta_2 = \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2,$$
$$\text{пр}\,\overline{SM} = \text{вел}\,\overline{SM} \cdot \cos\gamma_2 = \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2,$$

то

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \tag{16}$$

В частности, в случае перпендикулярности осей l_1 и l_2 $\cos\varphi = 0$, и формула (16) даёт *условие перпендикулярности двух осей:*

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0. \qquad (17)$$

Замечание. Мы говорили о направляющих косинусах оси. В случае, когда речь будет идти о направляющих косинусах прямой, мы будем понимать под ними направляющие косинусы той оси, которая получится, если на данной прямой выбрать за положительное то или иное из двух возможных направлений. Очевидно, при замене выбранного положительного направления прямой противоположным ему знаки направляющих косинусов изменятся.

Упражнения

1. Построить точки по координатам: а) (4, 3, 5); б) (1, 2, —1); в) (4, 4, 4); г) (—4, —4, —4).

2. Указать особенности положения точек: а) (4, 0, 0); б) (0, —7, 0); в) (0, —7, 2); г) (—5, 0, 3).

3. Даны точки (2, —3, —1) и (a, b, c). Найти координаты точек, симметричных с данными относительно: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.

4. Правильная четырёхугольная пирамида $SP_1P_2P_3P_4$, каждое ребро которой имеет длину a, расположена следующим образом: вершина S лежит на оси Oz, основание — на плоскости xOy, причём ребро P_1P_2 перпендикулярно к оси Oy, а ребро P_1P_4 перпендикулярно к оси Ox. Найти координаты точек S, P_1, P_2, P_3, P_4.

5. Определить расстояние точки $A(4, -3, 5)$ от начала координат и от осей координат.

6. Найти расстояние между точками (1, 2, 2) и (—1, 0, 1).

7. Показать, что треугольник с вершинами в точках $A(1, -2, 1)$, $B(3, -3, -1)$, $C(4, 0, 3)$ прямоугольный.

8*. Даны четыре точки: (0, 0, 0) (2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 6). Найти радиус сферы, проходящей через эти точки.

9. Найти координаты точки, делящей отрезок $\overline{AB}$ между точками $A(1, 1, 1)$ и $B(1, 2, 0)$ в отношении 2 : 1.

10. Определить длины сторон и координаты центра тяжести треугольника, вершины которого лежат в точках $A(2, 5, 0)$, $B(11, 3, 8)$, $C(5, 1, 12)$.

11. Отрезок $\overline{AB}$ делится точкой C в отношении 5 : 2. Точки A и C имеют соответственно координаты (3, 7, 4) и (8, 2, 3). Найти координаты точки B.

12. Две системы координат имеют одинаковые направления осей, но разные начала. Зная, что одна и та же точка определяется относительно этих систем координатами (1, 1, 1), (7, 3, —5), найти координаты середины отрезка между началами этих систем.

13. Существует ли луч, образующий с осями координат углы (45°, 45°, 60°)?

14. Луч OM образует с осями координат равные острые углы. Найти направляющие косинусы этого луча.

15. Луч OM образует с отрицательной полуосью Ox и с положительными полуосями Oy и Oz равные острые углы. Найти направляющие косинусы этого луча.

16. Найти направляющие косинусы прямой, проходящей через начало координат и через точку (2, —2, —1).

17. Найти направляющие косинусы прямой, проходящей через начало координат и через точку (a, a, a).

18. Найти величину и направление силы, проекции которой на оси координат соответственно равны: $X = -6$, $Y = -2$, $Z = 9$.

19. Аппликата z некоторой точки A положительна; отрезок $\overline{OA}$ имеет длину $r = 6$ и образует с осью Ox угол в 60° и с осью Oy угол в 45°. Найти угол этого отрезка с осью Oz и координаты точки A.

20. Точка A имеет координаты $x = 15$, $y = 8$ и $z < 0$; отрезок $\overline{OA}$ образует с осью Ox угол в 30°. Найти длину этого отрезка, его направляющие косинусы и координату z точки A.

21. Дана точка $A(6, 3, 2)$. Найти косинусы углов, образуемых лучом OA с плоскостями координат.

22*. Найти расстояние между точками $A(2, 5, -1)$ и $B(5, 1, 11)$ и направляющие косинусы прямой, их соединяющей.

23. Найти расстояние между точками $A(-2, 2, 5)$ и $B(2, -1, 5)$ и направляющие косинусы прямой, их соединяющей.

24. Найти угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

25. Найти угол между прямыми, из которых одна проходит через точки $(0, 0, 0)$ и $(10, 5, 10)$, а другая — через точки $(-2, 1, 3)$ и $(0, -1, 2)$.

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Векторы и скаляры. Величины, с которыми приходится встречаться в механике, физике и других прикладных дисциплинах, бывают двоякого рода. С одной стороны, такие величины, как температура, время, масса, плотность, длина отрезка, площадь, объём и т. д., вполне характеризуются одним числовым значением. С другой стороны, такие величины, как сила, скорость, ускорение и т. д., становятся определёнными только тогда, когда известно, каковы их числовые значения и направления в пространстве. Величины первого рода называются *скалярными*, или, короче, *скалярами*. Величины второго рода называются *векторными*.

Всякую векторную величину геометрически мы можем изобразить с помощью отрезка определённой длины и определённого направления, если длину отрезка при выбранной единице масштаба примем равной числовому значению векторной величины, а направление отрезка будем считать совпадающим с её направлением.

Отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление в пространстве (т. е. направленный отрезок), будем называть *вектором*. Таким образом, вектор служит для геометрического изображения физической векторной величины[1]).

Два вектора считаются равными, если выполнены следующие три условия: 1) *длины векторов равны*, 2) *векторы параллельны*, т. е. расположены на одной прямой или на параллельных прямых, 3) *векторы направлены в одну сторону*.

Следует различать начало и конец вектора. Поменяв их местами, мы получим уже другой вектор (направленный противоположно первому). Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому начало вектора можно помещать в любой точке пространства[2]). Выбрав некоторое начало — точку O, — удобно счи-

---

[1]) Иногда векторную величину также называют вектором.

[2]) Для направленного отрезка вводится новый термин — вектор, так как теперь, установив понятие равенства направленных отрезков-векторов, мы будем производить с ними действия по определённым правилам, рассматриваемым в векторной алгебре.

тать все векторы исходящими из этой точки. В таком случае мы будем говорить, что векторы приведены к общему началу O.

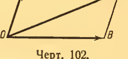
На чертеже направление вектора условимся отмечать стрелкой. В тексте мы будем обозначать векторы либо одной напечатанной жирно буквой, либо двумя буквами со стрелкой над ними, при этом первая буква указывает начало вектора, а вторая — его конец. Так, вектор, идущий из точки O в точку M, мы будем обозначать двумя буквами $\overrightarrow{OM}$ или просто одной буквой, которая стоит в конце вектора; следовательно, мы считаем:

$$\mathbf{M}=\overrightarrow{OM},\quad \mathbf{a}=\overrightarrow{Oa} \text{ и т. д.}$$

Если начало вектора не совпадает с выбранным началом O, то во избежание недоразумений мы будем обыкновенно употреблять две буквы $\overrightarrow{AB}$. Длина вектора, называемая также модулем или скаляром вектора, обозначается теми же буквами, что и вектор, но без стрелки (или же если вектор обозначен одной буквой, то той же буквой, но напечатанной нежирно). Иногда длину вектора записывают при помощи обычного в алгебре знака модуля: $|\overrightarrow{AB}|$. Таким образом, $AB=|\overrightarrow{AB}|$ есть длина вектора $\overrightarrow{AB}$, $M=|\mathbf{M}|$ — длина вектора $\mathbf{M}$.

§ 2. Сложение векторов. Известные из механики законы сложения векторных величин (сил, ускорений, скоростей) служат основанием следующего определения сложения векторов. *Суммой двух векторов* **A** *и* **B** *называют такой третий вектор* **C**, *выходящий из их общего начала, который служит диагональю параллелограмма, сторонами которого являются слагаемые векторы* (черт. 102), *и обозначают:*

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}. \qquad (1)$$



Черт. 102.

Если два вектора **A** и **B** после приведения их к общему началу лежат на одной прямой, то сумма их **C** есть по определению вектор, длина которого равна сумме длин слагаемых векторов и направление совпадает с направлением этих векторов, если последние одинаково направлены; если же слагаемые векторы направлены в разные стороны, то сумма их **C** есть вектор, длина которого равна разности длин слагаемых векторов и направление совпадает с направлением вектора, имеющего бо́льшую длину. В случае равенства длин противоположно направленных векторов их сумма есть особый «вектор», длина которого равна нулю. Такой вектор называют нулевым вектором и обозначают символом **0**.

Посмотрим теперь, будет ли сложение векторов удовлетворять основным законам, которым подчиняется сложение чисел. Для сложения чисел мы имеем два основных закона.

1. *Закон переместительности:*

$$a+b=b+a,$$

т. е. *сумма не зависит от порядка слагаемых.*

2. *Закон сочетательности:*

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

т. е. *чтобы прибавить сумму, можно прибавить последовательно каждое слагаемое.*

Первый закон, очевидно, удовлетворяется, что непосредственно вытекает из определения сложения векторов:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}. \tag{2}$$

Чтобы перейти ко второму закону (сочетательности), следует предварительно выяснить понятие суммы нескольких слагаемых. С этой целью упростим сначала самое построение суммы двух векторов. Мы условились считать равными векторы, имеющие одинаковую длину, параллельные и одинаково направленные. В силу этого векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (черт. 102) равны между собой. Отсюда вытекает такое правило сложения двух векторов: *в конце первого слагаемого строим второе слагаемое. Вектор, замыкающий эту ломаную, есть сумма. Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом второго.*

Это правило треугольника нетрудно теперь распространить на любое число слагаемых. Пусть, например, требуется найти сумму трёх векторов **A**, **B** и **C**:

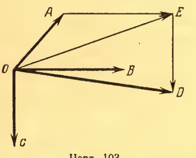
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{D},$$

причём под их суммой мы будем подразумевать результат последовательного прибавления к **A** сначала **B** и затем **C**. Другими словами, если

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{E},$$

то согласно определению будет:

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{C}.$$



Черт. 103.

По предыдущему правилу треугольника строим сначала сумму **A** + **B** (черт. 103), т. е. в точке A строим вектор $\overrightarrow{AE}=\mathbf{B}$ и соединяем точку O с точкой E: $\overrightarrow{OE}=\mathbf{E}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$. Затем к полученной сумме прибавляем вектор **C**, т. е. в конце $\overrightarrow{OE}$ строим вектор $\overrightarrow{ED}=\mathbf{C}$ и соединяем точку O с точкой D.

Тогда

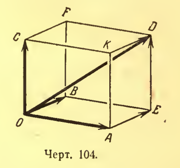
$$\overrightarrow{OD}=\mathbf{D}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}.$$

Отсюда вытекает такое правило сложения векторов: *чтобы построить сумму любого числа векторов, нужно в конце первого слагаемого вектора построить второй, в конце второго построить третий и т. д. Вектор, замыкающий полученную ломаную линию, представляет искомую сумму. Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом последнего.*

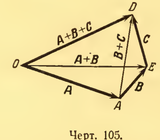
В случае сложения трёх векторов, не параллельных одной плоскости, сумму их можно получить и другим способом. Пусть векторы **A**, **B**, **C** приведены к общему началу O: $\overrightarrow{OA}=\mathbf{A}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{B}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{C}$. Построим на этих векторах параллелепипед (черт. 104). По предыдущему правилу

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OD},$$

но отрезок OD является диагональю параллелепипеда, таким образом сумма данных векторов равна вектору-диагонали параллелепипеда, рёбрами которого являются слагаемые векторы.



Черт. 104.



Черт. 105.

Заметим, что если бы слагаемые векторы были параллельны одной плоскости (такие векторы называются *компланарными*), то мы не могли бы построить на них параллелепипед.

Теперь перейдём к доказательству закона сочетательности:

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}. \qquad (3)$$

По правилу сложения векторов (черт. 105)

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OD},$$

но тому же вектору $\overrightarrow{OD}$ равна и сумма $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$, так как

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}.$$

Итак, равенство (3) доказано.

Из переместительного и сочетательного законов вытекает, что при нахождении суммы любого числа векторов можно складывать данные векторы в произвольном порядке.

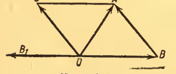
Заметим, что по отношению к обычной сумме чисел существуют ещё различные *законы монотонности* — о сравнительной величине слагаемых и суммы, как, например, сумма положительных слагаемых больше каждого из слагаемых. Все эти законы не имеют смысла для суммы векторов, потому что понятия «больше» и «меньше» неприложимы к векторам.

§ 3. Вычитание векторов. Обычно вычитание определяется как действие, обратное сложению: по сумме и одному из слагаемых отыскивается другое слагаемое. Соответственно с этим *разностью двух векторов* **A** и **B** *называется такой третий вектор* **C**, *что сумма* **B** *и* **C** *равна* **A**:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{C}, \text{ если } \mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{A}.$$

Изобразим на чертеже (черт. 106) данные векторы **A** и **B** направленными отрезками $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Проведём из точки B в точку A вектор и обозначим его через **C**, тогда, очевидно, $\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{A}$, следовательно,

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{C}.$$



Черт. 106.

Таким образом, *чтобы из одного вектора вычесть другой, нужно отнести их к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора-вычитаемого в конечную точку вектора-уменьшаемого.*

То же действие можно произвести и иначе.

Построим вектор $\overrightarrow{OB_1}$, длина которого равна длине вектора $\overrightarrow{OB}$, а направление противоположно; кроме того, дополним треугольник OAB до параллелограмма $OBAC$. Очевидно, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$, следовательно, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB_1}$. Заметив, что искомая разность

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC},$$

мы получаем следующее равенство:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}=\mathbf{A}+\mathbf{B}_1.$$

Отсюда вытекает правило: *чтобы из вектора* $\overrightarrow{OA}$ *вычесть вектор* $\overrightarrow{OB}$, *надо прибавить к* $\overrightarrow{OA}$ *вектор* $\overrightarrow{OB_1}$, *равный по длине вектору* $\overrightarrow{OB}$, *но противоположно направленный.*

Два вектора $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$, имеющие равные длины, но противоположные направления, будем называть *противоположными* векторами. Сумма их равна нулевому вектору:

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB_1}=0.$$

Вектор $\overrightarrow{OB_1}$, противоположный вектору $\overrightarrow{OB}$, условимся обозначать через $-\overrightarrow{OB}$. Так как $\overrightarrow{OB}=\mathbf{B}$ и $\overrightarrow{OB_1}=-\mathbf{B}$, то указанное выше правило вычитания векторов можно сформулировать следующим образом: *чтобы вычесть вектор* **B**, *нужно прибавить противоположный ему вектор* ($-\mathbf{B}$):

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}).$$

§ 4. Умножение вектора на число. Складывая несколько равных векторов, т. е. повторяя вектор слагаемым несколько раз, мы приходим к *умножению его на положительное целое число.* Согласно определению

$$\mathbf{A}n=\mathbf{A}+\mathbf{A}+\ldots+\mathbf{A},$$

где n есть число слагаемых векторов, равных **A**. Очевидно, произведение $\mathbf{A}n$ будет вектором того же направления, что и множимое **A**, только длина вектора $\mathbf{A}n$ будет больше длины вектора **A** в n раз.

Введём теперь понятие *деления вектора на целое положительное число.* Согласно определению

$$\frac{\mathbf{A}}{n}=\mathbf{A}\frac{1}{n}=\mathbf{B},$$

если $\mathbf{A}=\mathbf{B}n$. Отсюда вытекает, что оба вектора **A** и **B** имеют одно направление, но длина A вектора **A** в n раз больше длины B вектора **B**. Таким образом, при делении вектора на целое положительное число n направление его не меняется, а длина уменьшается в n раз.

После этого можно определить умножение вектора на положительную дробь $\lambda=\frac{p}{q}$, что значит умножить на p и разделить на q, а также умножение вектора на иррациональное положительное число λ. Во всех случаях направление вектора остаётся без изменения, длина же умножается на λ. Наконец, если множитель λ — число отрицательное, то условимся считать, что длина вектора умножается на $|\lambda|$, а направление меняется на противоположное.

В частности, при умножении вектора **A** на -1 мы получаем вектор $\mathbf{A}\cdot(-1)$, имеющий ту же длину, но направленный в противоположную сторону, т. е. вектор, противоположный вектору **A**.

Такой вектор по условию предыдущего параграфа обозначается через $-\mathbf{A}$. Следовательно, $\mathbf{A}\cdot(-1)=-\mathbf{A}$, причём $\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot(-1)=\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

Итак, установлено умножение вектора на любое действительное число: *при умножении вектора* **A** *на число* λ *длина вектора умножается на* $|\lambda|$, *а направление сохраняется прежним при* $\lambda>0$ *и заменяется противоположным при* $\lambda<0$ (при $\lambda=0$ произведение **A** на λ является нулевым вектором). Произведение **A** на

λ мы будем записывать не только в форме $\mathbf{A}\lambda$, но также и в форме $\lambda\mathbf{A}$. По отношению к этому умножению имеет место *распределительный закон*, который символически можно записать так:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\lambda=\mathbf{A}\lambda+\mathbf{B}\lambda. \tag{4}$$

В справедливости этого равенства мы убедимся, если заметим, что от умножения на число λ меняются только размеры векторов, т. е. масштаб чертежа; фигуры остаются подобными. Поэтому, так как векторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ образуют стороны и диагональ параллелограмма, то, умножив все члены на λ, т. е. изменив лишь размеры векторов одинаковым образом, мы получим снова параллелограмм, а значит, сохранится равенство

$$\mathbf{A}\lambda+\mathbf{B}\lambda=\mathbf{C}\lambda.$$

Последнее же равенство и выражает собой распределительный закон умножения, если заменить в нём $\mathbf{C}$ через $\mathbf{A}+\mathbf{B}$. Отметим ещё, что из определения умножения вектора на число вытекает справедливость равенств

$$\mathbf{A}(\lambda_1+\lambda_2)=\mathbf{A}\lambda_1+\mathbf{A}\lambda_2 \tag{5}$$

и

$$(\mathbf{A}\lambda_1)\lambda_2=(\mathbf{A}\lambda_2)\lambda_1=\mathbf{A}(\lambda_1\lambda_2), \tag{6}$$

где λ_1 и λ_2 — числа.

Будем обозначать одноимённой буквой с ноликом вверху вектор длины, равной 1, и того же направления, как и данный вектор (вектор, длина которого равна 1, называется единичным). Тогда из определения умножения вектора на число следует:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^0A. \tag{7}$$

В самом деле, при умножении вектора $\mathbf{A}^0$ на число A направление вектора не изменится, а длина сделается равной A, т. е. мы получим как раз вектор $\mathbf{A}$.

§ 5. Проекции вектора. *Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось называется длина отрезка $\overline{ab}$ этой оси, заключённого между проекциями a и b его начальной точки A и конечной точки B, взятая со знаком $+$, если направление отрезка $\overline{ab}$ совпадает с направлением оси проекций, и со знаком $-$, если эти направления противоположны.* Таким образом, проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось является величина направленного отрезка $\overline{ab}$ оси.

Основные положения теории проекций (ч. 2, гл. I, § 3) можно высказать следующим образом:

1. *Проекция вектора на какую-либо ось равна произведению длины вектора на косинус угла между осью и вектором*, т. е.

$$\text{пр}\,\overrightarrow{AB}=AB\cos\alpha.$$

Отсюда, в частности, следует, что равные векторы имеют равные проекции на ту же ось.

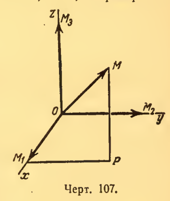
2. *Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось*, т. е., например:

$$\text{пр}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \text{пр}\,\mathbf{A} + \text{пр}\,\mathbf{B} + \text{пр}\,\mathbf{C},$$

где все проекции отнесены к одной и той же оси.

Действительно, сумма векторов есть замыкающий вектор ломаной, у которой составляющими звеньями служат слагаемые векторы (см. § 2).

Рассмотрим прямоугольную систему координат и произвольный вектор $\overrightarrow{OM}$ (черт. 107). Из точки M — конца вектора $\overrightarrow{OM}$ — проведём прямую параллельно оси Oz до пересечения в точке P с плоскостью xOy и из точки P в плоскости xOy проведём прямую параллельно оси Oy до пересечения в точке M_1 с осью Ox. Очевидно, будем иметь:



Черт. 107.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM}.$$

Откладывая векторы $\overrightarrow{M_1P}$ и $\overrightarrow{PM}$ от точки O, заменим их равными им векторами

$$\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{OM_2}, \quad \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_3}$$

и, значит, будем иметь:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3},$$

или иначе:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3. \qquad \text{(I)}$$

Равенство (I) показывает, что *всякий вектор можно разложить на три слагаемых, лежащих на осях координат*. Слагаемые векторы $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ назовём *компонентами* или *составляющими* данного вектора $\mathbf{M}$ относительно системы координат $Oxyz$.

От точки O в положительном направлении каждой оси координат отложим по вектору длины, равной 1. Обозначим три введённых попарно взаимно перпендикулярных единичных вектора соответственно через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и назовём их *основными векторами*. Возвращаясь к равенству (I), заметим, что вектор $\mathbf{M}_1$, как и вектор $\mathbf{i}$, расположен на оси абсцисс, а потому имеем:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{i}X,$$

где X есть длина вектора $\mathbf{M}_1$, взятая со знаком $+$, если направления векторов $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{i}$ совпадают, и взятая со знаком $-$, если

направление вектора $\mathbf{M}_1$ противоположно направлению основного вектора $\mathbf{i}$. Другими словами, X есть число, являющееся проекцией вектора $\mathbf{M}$ на ось абсцисс. Аналогично получим:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{j}Y, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{k}Z,$$

где Y и Z — проекции вектора $\mathbf{M}$ соответственно на оси ординат и аппликат. Таким образом, рассматривая три проекции X, Y, Z вектора $\mathbf{M}$ на оси координат, перепишем равенство (I) в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z. \qquad (\text{I}')$$

Это равенство даёт разложение вектора по основным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Есть существенная разница между компонентами вектора и его проекциями. *Проекции вектора* — это три числа X, Y, Z, которые являются декартовыми координатами конца вектора — точки M, если начало вектора находится в начале координат. Называя *радиусом-вектором точки* M вектор, идущий от начала координат в точку M, мы можем сказать, что декартовы координаты X, Y, Z точки M суть проекции её радиуса-вектора $\overline{OM}$. Компоненты же вектора представляют собой векторы $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, сумма которых равна данному вектору $\mathbf{M}$. Между компонентами и проекциями существует следующая простая зависимость:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{i}X, \; \mathbf{M}_2 = \mathbf{j}Y, \; \mathbf{M}_3 = \mathbf{k}Z, \qquad (8)$$

т. е. *компонента получается умножением основного единичного вектора на проекцию.*

Значение равенства (I′) в теории векторов исключительно велико. При помощи этого равенства устанавливается связь между двумя частями теории векторов — геометрической и алгебраической. Ведь векторная алгебра состоит из соединения этих двух моментов: геометрического и алгебраического. Взаимно дополняя друг друга, они и создают то, чем так выгодно отличается векторная алгебра: геометрическая теория даёт возможность широко использовать геометрические представления, алгебраическая же часть позволяет проводить все выкладки.

Вместо полной записи

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z \qquad (\text{I}')$$

часто пользуются сокращённой:

$$\mathbf{M}\{X, \; Y, \; Z\}.$$

Здесь X, Y, Z обозначают, как выше было указано, проекции[1]) вектора $\mathbf{M}$, или, что то же, координаты точки M, являющейся концом радиуса-вектора $\mathbf{M}$. Например:

$$\mathbf{M}\{2, \; 3, \; -1\} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

[1]) В дальнейшем, говоря о проекциях вектора на оси координат, мы иногда будем коротко называть их просто проекциями, опуская слова «на оси координат».

§ 6. Действия над векторами, заданными своими проекциями. В § 5 мы заметили, что проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. Применяя это предложение относительно каждой оси координат, мы заключаем: *При сложении векторов одноимённые проекции их складываются.* Запишем это так: если

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2,$$

то

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{i}(X_1 + X_2) + \mathbf{j}(Y_1 + Y_2) + \mathbf{k}(Z_1 + Z_2).$$

Из правила сложения векторов непосредственно вытекает правило вычитания векторов: *чтобы вычесть вектор, нужно вычесть его проекции*, т. е.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{i}(X_1 - X_2) + \mathbf{j}(Y_1 - Y_2) + \mathbf{k}(Z_1 - Z_2).$$

Правило умножения вектора на число получим умножением обеих частей равенства $\mathbf{A} = \mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1$ на λ (при этом мы пользуемся свойствами умножения, отмеченными формулами (4) и (6) § 4):

$$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{i}X_1\lambda + \mathbf{j}Y_1\lambda + \mathbf{k}Z_1\lambda.$$

Таким образом, *чтобы умножить вектор на число, нужно умножить все его проекции на это число.*

Пример. Найти радиус-вектор точки, делящей в отношении λ отрезок $\overline{AB}$ между точками $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$ [1]. Найдём радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M, делящей отрезок $\overline{AB}$ в данном отношении λ (см. ч. 2, гл. I, § 2). Очевидно, что

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}.$$

Заметив, что

$$\overrightarrow{AM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \quad \overrightarrow{MB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r},$$

перепишем наше условие в виде:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}),$$

откуда

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{r}_2 - \lambda\mathbf{r} \text{ и } (1 + \lambda)\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda}. \tag{9}$$

Обозначая через x_1, y_1, z_1 координаты данной точки A, через x_2, y_2, z_2 координаты другой данной точки B и через x, y, z координаты искомой точки M, перепишем формулу (9) в проекциях:

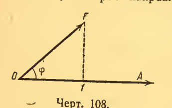
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Последние формулы были выведены в гл. I, § 2.

---

[1]) Радиус-вектор точки условимся записывать в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку.

§ 7. Скалярное произведение векторов. В механике и физике часто приходится иметь дело со следующей задачей: найти работу силы **F**, если точка, на которую действует сила, совершила перемещение $\overrightarrow{OA} = \mathbf{A}$. Если точка движется по направлению силы, то, по определению, работа силы равна произведению величины силы на длину перемещения, т. е. AF. Если же точка движется под углом φ к направлению силы, то работает только та слагающая силы $\overrightarrow{OF}$, которая направлена по линии OA, а перпендикулярная слагающая уравновешивается сопротивлением. Проектируя силу на направление пути, получим (черт. 108):



Черт. 108.

$$\text{пр } \mathbf{F} = F \cos \varphi.$$

Следовательно, работа силы будет равна:

$$\text{пр } \mathbf{F} \cdot A = AF \cos \varphi.$$

Таким образом, по двум данным векторам **F** и **A** мы определяем скаляр $AF \cos \varphi$. Последний называют скалярным произведением векторов **A** и **F**. Итак, по определению, *скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин, умноженному на косинус угла между ними.*

Скалярное произведение принято обозначать одним из трёх способов:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{AB} = (\mathbf{AB}).$$

Согласно определению имеем:

$$\mathbf{AB} = AB \cos (\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}), \tag{10}$$

где под $(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})$ подразумевается угол между векторами **A** и **B**. Заметив, что $B \cos (\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})$ есть проекция вектора **B** на направление вектора **A**, мы можем написать:

$$\mathbf{AB} = A \text{ пр}_{\mathbf{A}} \mathbf{B}; \tag{10'}$$

аналогично:

$$\mathbf{AB} = B \text{ пр}_{\mathbf{B}} \mathbf{A}, \tag{10''}$$

или словами: *скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, помноженной на проекцию другого вектора на направление первого.*

В частности, если $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0$ есть единичный вектор, то

$$\mathbf{AB}^0 = 1 \cdot \text{пр}_{\mathbf{B}^0} \mathbf{A} = \text{пр}_{\mathbf{B}^0} \mathbf{A},$$

т. е. *при скалярном умножении вектора* **A** *на единичный вектор получаем проекцию этого вектора* **A** *на направление единичного вектора.*

§ 8. Основные свойства скалярного произведения.

I. *Скалярное произведение обращается в нуль в том и только в том случае, когда по крайней мере один из векторов является*

нулевым или если векторы перпендикулярны. В самом деле, если $A=0$, или $B=0$, или $\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})=0$, то $AB\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})=0$.

Обратно, если $\mathbf{AB}=0$ и перемножаемые векторы не являются нулевыми, то $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$, потому что из условия

$$AB\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})=0$$

при $A\neq 0$ и $B\neq 0$ вытекает:

$$\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})=0, \text{ т. е. } \mathbf{A}\perp\mathbf{B}.$$

Так как направление нулевого вектора неопределённо, то нулевой вектор можно считать перпендикулярным к любому вектору. Поэтому указанное свойство скалярного произведения может быть сформулировано короче: *скалярное произведение обращается в нуль в том и только том случае, когда векторы перпендикулярны.*

II. *Скалярное произведение обладает свойством переместительности:*

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}. \tag{11}$$

Это свойство непосредственно вытекает из определения:

$$\mathbf{AB}=AB\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}),\ \mathbf{BA}=BA\cos(\widehat{\mathbf{B}, \mathbf{A}}),$$

потому что $(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})$ и $(\widehat{\mathbf{B}, \mathbf{A}})$ различные обозначения одного и того же угла.

III. Исключительно важное значение имеет *распределительный закон.* Его применение столь же велико, как и в обычной арифметике или алгебре, где он формулируется так: *чтобы умножить сумму, нужно умножить каждое слагаемое и сложить полученные произведения,* т. е.

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Очевидно, что умножение многозначных чисел в арифметике или многочленов в алгебре основано на этом свойстве умножения.

Такое же основное значение имеет этот закон и в векторной алгебре, так как на основании его мы можем применять к векторам обычное правило умножения многочленов.

Докажем, что *для любых трёх векторов* **A**, **B**, **C** *справедливо равенство*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}. \tag{12}$$

По второму определению скалярного произведения, выражаемому формулой (10″), получим:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=C\,\text{пр}_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}+\mathbf{B}).$$

Применив теперь свойство 2 проекций из § 5, найдем:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=C(\text{пр}_{\mathbf{C}}\mathbf{A}+\text{пр}_{\mathbf{C}}\mathbf{B})=C\,\text{пр}_{\mathbf{C}}\mathbf{A}+C\,\text{пр}_{\mathbf{C}}\mathbf{B}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC},$$

что и требовалось доказать.

IV. *Скалярное произведение обладает свойством сочетательности относительно числового множителя;* это свойство выражается следующей формулой:

$$(\mathbf{AB})\,\lambda = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\lambda), \tag{13}$$

т. е. *чтобы умножить скалярное произведение векторов на число, достаточно умножить на это число один из сомножителей.*

Для доказательства мы вычислим отдельно левую и правую части последнего равенства (предполагая $\lambda \geqslant 0$)

$$(\mathbf{AB})\,\lambda = AB\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})\,\lambda,$$

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\lambda) = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}^0 B\lambda) = AB\lambda\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}^0})$$

и заметим, что углы $\widehat{\mathbf{AB}}$ и $\widehat{\mathbf{AB}^0}$ равны, потому что векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^0$ одного направления. Легко проверить формулу (13) и при $\lambda < 0$.

Как частный случай доказанного свойства отметим следующее предложение: *чтобы перемножить скалярно два вектора, можно один из них умножить скалярно на единичный вектор, направленный по второму, и полученное произведение умножить на длину второго,* т. е.

$$\mathbf{DC} = (\mathbf{DC}^0)\,C.$$

§ 9. Скалярное произведение векторов, заданных проекциями. Обозначая через X_1, Y_1, Z_1 проекции вектора $\mathbf{A}$, а через X_2, Y_2, Z_2 проекции вектора $\mathbf{B}$, выразим скалярное произведение $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1)(\mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2).$$

По свойству распределительности, суммы векторов умножаются как многочлены. Следовательно, получаем:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{ii}X_1X_2 + \mathbf{ji}Y_1X_2 + \mathbf{ki}Z_1X_2 + \mathbf{ij}X_1Y_2 + \mathbf{jj}Y_1Y_2 + \mathbf{kj}Z_1Y_2 + \\ + \mathbf{ik}X_1Z_2 + \mathbf{jk}Y_1Z_2 + \mathbf{kk}Z_1Z_2. \tag{14}$$

Так как $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ представляют три взаимно перпендикулярных единичных вектора, то

$$\mathbf{ij} = 0, \quad \mathbf{jk} = 0, \quad \mathbf{ki} = 0,$$
$$\mathbf{ii} = 1, \quad \mathbf{jj} = 1, \quad \mathbf{kk} = 1,$$

следовательно, в полученном выражении (14) для $\mathbf{AB}$ пропадут шесть слагаемых, и окончательная формула будет:

$$\mathbf{AB} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2, \tag{15}$$

или словами: *скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноимённых проекций.*

Прилагая обычное определение степени, естественно называть скалярное произведение вектора самого на себя его *скалярным квадратом.* Применяя полученную формулу (15) при $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, найдем:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2.$$

С другой стороны, согласно определению скалярного произведения (§ 7) получаем:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = AA\cos 0 = A^2.$$

Следовательно, мы имеем следующую формулу для определения длины вектора:

$$A^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \tag{16}$$

откуда

$$A = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}, \tag{16'}$$

т. е. *длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его проекций.*

Заметив, что проекции единичного вектора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0$ будут его направляющими косинусами (§ 4 гл. I), мы из формулы (16) получаем:

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$

что совпадает с формулой (15) § 4 гл. I.

Пусть теперь даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найдём расстояние между ними. Заметим, что вектор

$$\mathbf{A} = \overline{M_1M_2} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z$$

есть разность векторов

$$\overline{OM}_2 = \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2$$

и

$$\overline{OM}_1 = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1.$$

Следовательно, мы имеем:

$$X = x_2 - x_1,$$
$$Y = y_2 - y_1,$$
$$Z = z_2 - z_1,$$

т. е. проекции вектора на оси координат равны разностям одноимённых координат конца и начала вектора. Применяя формулу (16'), получим:

$$A = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

т. е. *расстояние между двумя точками равно квадратному корню из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек*, что совпадает с формулой (6) § 2 гл. I.

§ 10. Направление вектора. Согласно определению скалярного произведения векторов имеем:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = AB\cos\varphi,$$

где φ есть угол между векторами **A** и **B**. Из этой формулы получаем:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{AB}}{AB}, \tag{17}$$

т. е. *косинус угла между векторами равен их скалярному произведению, делённому на произведение длин.*

Выражая числитель и знаменатель последней дроби посредством проекций векторов (§ 9, формулы (15) и (16′)), находим:

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \tag{17′}$$

В частности, полагая в формулах (17) и (17′) $\mathbf{B}=\mathbf{i}$ и замечая, что в этом случае $B=1$, $X_2=1$, $Y_2=0$, $Z_2=0$, находим:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{Ai}}{A}, \tag{18}$$

или

$$\cos\alpha = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}, \tag{18′}$$

где α есть угол оси Ox с вектором **A**. Аналогично, взяв $\mathbf{B}=\mathbf{j}$ и $\mathbf{B}=\mathbf{k}$, получим:

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{Aj}}{A},\quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{Ak}}{A}; \tag{19}$$

или в координатной форме:

$$\cos\beta = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}},\quad \cos\gamma = \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}. \tag{19′}$$

Последние формулы дают возможность определить направляющие косинусы вектора (т. е. косинусы углов между осями координат и вектором) по его проекциям. Далее,

$$\cos\varphi = \mathbf{A}^0\mathbf{B}^0,\ \text{или}\ \cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2, \tag{20}$$

где α_1, β_1, γ_1 суть углы осей координат с вектором $\mathbf{A}^0$, а α_2, β_2, γ_2 — углы тех же осей с вектором $\mathbf{B}^0$. Последняя формула (20) совпадает с формулой (16) § 4 гл. I.

Для иллюстрации изложенных результатов рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Какому условию должны удовлетворять три вектора **a**, **b**, **c**, чтобы из них можно было образовать треугольник, совмещая начало каждого вектора с концом одного из двух других векторов?

Очевидно, необходимым и достаточным условием для этого является то, чтобы сумма векторов **a**, **b** и **c** равнялась нулю:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0.$$

Пример 2. Доказать, что возможно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника ABC.

Обозначая середины сторон треугольника ABC (черт. 109) через A_1, B_1 и C_1, выразим векторы, представляющие медианы треугольника, т. е. $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$, через векторы **a**, **b**, **c**. Легко видеть из черт. 109, что

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}}{2},$$

так как

$$\overrightarrow{BA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\mathbf{a}.$$

Аналогично найдём:

$$\overrightarrow{BB_1}=\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2},\quad \overrightarrow{CC_1}=\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}.$$

Черт. 109.

Остаётся проверить условие примера 1, достаточное для того, чтобы из векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ можно было образовать треугольник:

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}}{2}+\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2}+\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}=\frac{3}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=0.$$

Так как условие примера 1 выполняется, то из векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ действительно можно составить треугольник.

Пример 3. На точку действуют три силы, проекции которых на прямоугольные оси равны

$$X_1=1,\ Y_1=2,\ Z_1=3;\quad X_2=-2,\ Y_2=3,\ Z_2=-4;$$
$$X_3=3,\quad Y_3=-4,\ Z_3=5.$$

Найти величину и направление равнодействующей.

Обозначая через X, Y, Z проекции равнодействующей, имеем:

$$X=X_1+X_2+X_3=2,\quad Y=Y_1+Y_2+Y_3=1,\quad Z=Z_1+Z_2+Z_3=4.$$

Следовательно, величина R равнодействующей **R** будет:

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{21},$$

а её направление определяется по формулам

$$\cos(\widehat{\mathbf{R},x})=\frac{X}{R}=\frac{2}{\sqrt{21}},\quad \cos(\widehat{\mathbf{R},y})=\frac{Y}{R}=\frac{1}{\sqrt{21}},$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{R},z})=\frac{Z}{R}=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Пример 4. Найти угол между векторами **A** $\{1,\ 2,\ 3\}$, **B** $\{2,\ -1,\ 4\}$.

По формуле (17') получим:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+2\cdot -1+3\cdot 4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}}=\frac{12}{7\sqrt{6}}=\frac{2}{7}\sqrt{6}.$$

Пример 5. Дан треугольник OAB. Тогда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$. Вычисляя скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{AB}$, получим:

$$\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})^2=\overrightarrow{AO}^2+2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2,$$

или

$$AB^2=OA^2+OB^2+2OA\cdot OB\cos(\widehat{\overrightarrow{AO},\,\overrightarrow{OB}}).$$

Обозначая через φ внутренний угол треугольника OAB при вершине O, последней формуле придадим обычный вид:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\varphi,$$

так как

$$(\widehat{\overrightarrow{AO},\,\overrightarrow{OB}})=\pi-\varphi.$$

§ 11. Векторное произведение. *Векторным произведением двух векторов* **A** *и* **B** *называется новый вектор* **C**, *длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах* **A** *и* **B**, *перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от* **A** *к* **B** *вокруг полученного вектора* **C** *представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора* **C** (черт. 110).

C
B
A

Черт. 110.

Если векторы **A** и **B** параллельны, то их векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Из этого определения следует, что *длина вектора* **C** *равна*:

$$C=AB\sin(\widehat{\mathbf{A},\,\mathbf{B}}), \qquad (21)$$

т. е. произведению длин перемножаемых векторов, умноженному на синус угла между ними.

Векторное произведение **A** на **B** обозначается символом $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ или $\mathbf{C}=[\mathbf{AB}]$. *Векторное произведение равно нулевому вектору в том и только том случае, когда по крайней мере один из перемножаемых векторов является нулевым или если эти векторы параллельны (коллинеарны)*[1]. В самом деле: если $A=0$, или $B=0$, или $\sin(\widehat{\mathbf{A},\,\mathbf{B}})=0$, то $AB\sin(\widehat{\mathbf{A},\,\mathbf{B}})=0$, а потому $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{0}$.

Обратно, если $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{0}$ и перемножаемые векторы не являются нулевыми, то $\mathbf{A}\parallel\mathbf{B}$, потому что из условия $AB\sin(\widehat{\mathbf{A},\,\mathbf{B}})=0$ при $A\neq0$ и $B\neq0$ вытекает $\sin(\widehat{\mathbf{A},\,\mathbf{B}})=0$, т. е. $\mathbf{A}\parallel\mathbf{B}$. Так как нулевой вектор можно считать коллинеарным любому вектору, то мы можем сказать, что *векторное произведение равно нулевому вектору в том и только том случае, когда перемножаемые векторы*

[1]) Параллельные векторы называются также коллинеарными.

коллинеарны. Таким образом, условие коллинеарности векторов будет:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0. \tag{22}$$

В частности, всегда

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0, \tag{22'}$$

вследствие чего является излишним вводить понятие о векторном квадрате вектора, в то время как мы рассматривали скалярный квадрат в связи со скалярным умножением.

Замечание. Условие (22) коллинеарности двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ возможно заменить следующим:

$$\mathbf{A} = \lambda \cdot \mathbf{B},$$

где λ — некоторое число (§ 4) (считая $B \neq 0$).

Если векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ взаимно перпендикулярны, то $\sin(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) = 1$, и, значит, длина вектора-произведения равна произведению длин векторов сомножителей:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB, \text{ если } \mathbf{A} \perp \mathbf{B}. \tag{23}$$

Пример 1. Проверить справедливость равенств $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ суть основные координатные векторы.

Так как векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ направлены по осям координат Ox и Oy, то вектор $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ будет направлен по оси Oz. С другой стороны, длина этого вектора равна площади прямоугольника, построенного на $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, т. е. 1. Следовательно, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Также очевидно, что $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$ имеет длину, равную единице, и направлен в отрицательную сторону оси Ox, следовательно, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$.

Пример 2. Показать, что $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{AB})^2 = A^2B^2$.

Действительно,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = A^2B^2 \sin^2(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}), \quad (\mathbf{AB})^2 = A^2B^2 \cos^2(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}});$$

складывая, находим:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{AB})^2 = A^2B^2.$$

В механике важное значение имеет понятие момента силы относительно данной точки. Если сила $\mathbf{F}$ приложена к точке A (черт. 111), то моментом силы $\mathbf{F}$ относительно точки O называется вектор $\mathbf{M}$, определяемый формулой

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ есть радиус-вектор точки приложения. Из определения векторного произведения следует, что величина момента равна величине силы, умноженной на расстояние OP точки O от прямой, вдоль которой действует сила.

Черт. 111.

§ 12. Основные свойства векторного произведения.

1. *При перестановке сомножителей векторное произведение умножается на* (-1), т. е.

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \tag{24}$$

В самом деле, площадь параллелограмма, построенного на векторах A и B, а также и его плоскость не меняются при перестановке A и B. Поэтому векторы $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ имеют одинаковые длины и коллинеарны.

Направления же этих векторов противоположны; действительно, если смотреть на плоскость векторов A и B с конца вектора $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, то кратчайший поворот от B к A будет казаться происходящим по часовой стрелке. Следовательно, вектор $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ должен быть направлен в противоположную сторону.

Заметим ещё, что в случае коллинеарности векторов A и B равенство (24) очевидно, так как тогда $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ — нулевые векторы:

2. *Векторное произведение обладает свойством сочетательности относительно числового множителя*; это свойство выражается следующими формулами:

$$\lambda(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}\times\mathbf{B} \quad \text{и} \quad \lambda(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\times\lambda\mathbf{B}, \qquad (25)$$

т. е. *чтобы умножить векторное произведение векторов на число, достаточно умножить на это число один из сомножителей.*

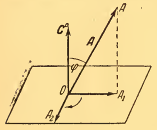
Обе формулы (25) доказываются аналогично. Докажем, например, первую из них. Ограничимся случаем $\lambda>0$.

Для доказательства равенства векторов $\lambda(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ и $\lambda\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ заметим прежде всего, что длины этих векторов одинаковы:

$$|\lambda(\mathbf{A}\times\mathbf{B})|=\lambda|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=\lambda AB\sin(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}}),$$

$$|\lambda\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\lambda\mathbf{A}|B\sin(\widehat{\lambda\mathbf{A},\mathbf{B}})=\lambda AB\sin(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}}).$$

Направления же векторов $\lambda(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ и $\lambda\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ совпадают, так как при умножении вектора на положительное число его направление не меняется.



Черт. 112.

3. *Векторное произведение подчиняется распределительному закону,* т. е.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}. \qquad (26)$$

Для доказательства заметим сначала, что произведение $\mathbf{A}\times\mathbf{C}^0$, где $\mathbf{C}^0$ — единичный вектор, можно построить так (черт. 112). Спроектируем вектор $\mathbf{A}=\overrightarrow{OA}$ на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{C}^0$, и полученную вектор-проекцию $\overrightarrow{OA_1}$ повернём в этой плоскости вокруг точки O по часовой стрелке на 90° (если смотреть на плоскость с конца вектора $\mathbf{C}^0$).

Полученный вектор $\overrightarrow{OA_2}$ и равен $\mathbf{A}\times\mathbf{C}^0$. В самом деле,

а) $OA_2=OA_1=A\cos(90°-\varphi)=A\sin\varphi$,

где φ — угол между векторами A и $\mathbf{C}^0$;

б) вектор $\overrightarrow{OA_2}$ перпендикулярен к векторам **A** и $\mathbf{C}^0$ и направлен в ту сторону, из которой кратчайшее вращение от **A** к $\mathbf{C}^0$ представляется совершающимся против часовой стрелки.

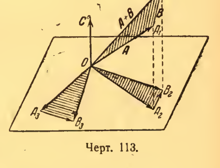
Итак, $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}^0$.

Пусть теперь даны единичный вектор $\mathbf{C}^0$, перпендикулярная к нему плоскость p и треугольник OA_1B_1 (черт. 113), в котором

$$\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{A}, \quad \overrightarrow{A_1B_1} = \mathbf{B}$$

и

$$\overrightarrow{OB_1} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$



Черт. 113.

Спроектируем $\triangle OA_1B_1$ на плоскость p и повернём проекцию OA_2B_2 в плоскости p по часовой стрелке на 90°.

Получим $\triangle OA_3B_3$, в котором по предыдущему

$$\overrightarrow{OB_3} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C}^0, \quad \overrightarrow{OA_3} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}^0, \quad \overrightarrow{A_3B_3} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}^0.$$

Так как

$$\overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3B_3},$$

то

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C}^0 = \mathbf{A} \times \mathbf{C}^0 + \mathbf{B} \times \mathbf{C}^0. \tag{27}$$

Заметив, что $\mathbf{C} = C \cdot \mathbf{C}^0$, умножим теперь обе части равенства (27) на скаляр C. Применив свойство 2 векторного произведения, получим:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times C\mathbf{C}^0 = \mathbf{A} \times C\mathbf{C}^0 + \mathbf{B} \times C\mathbf{C}^0,$$

или

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Показать, что $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, и выяснить геометрический смысл этого равенства, изображая векторы $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ и $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ диагоналями параллелограмма.

В самом деле:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{B} =$$
$$= -\mathbf{B} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 2(\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Геометрически это значит, что удвоенная площадь параллелограмма равна площади параллелограмма, построенного на его диагоналях.

Пример 2. Пусть вершины треугольника ABC заданы своими радиусами-векторами $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)$, $\mathbf{C}(\mathbf{r}_3)$. Найти вектор **S**, представляющий треугольную площадку ABC, на которой задано направление обхода контура от A к B и от B к C, т. е. найти вектор, длина которого численно равна

площади данного треугольника, а направление перпендикулярно к его плоскости (причём вектор должен быть направлен в ту сторону, откуда заданный обход контура треугольника кажется происходящим против движения часовой стрелки). Так как $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$, то искомый вектор $\mathbf{S}$ будет:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) =$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) =$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

§ 13. Векторное произведение векторов, заданных проекциями. Обозначая через X_1, Y_1, Z_1 проекции вектора $\mathbf{A}$, а через X_2, Y_2, Z_2 проекции вектора $\mathbf{B}$, выразим через них векторное произведение $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1) \times (\mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2).$$

По свойству распределительности суммы векторов умножаются как многочлены. Следовательно, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) X_1X_2 + (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) Y_1X_2 + (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) Z_1X_2 + \\ + (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) X_1Y_2 + (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) Y_1Y_2 + (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) Z_1Y_2 + \\ + (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) X_1Z_2 + (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) Y_1Z_2 + (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) Z_1Z_2. \end{aligned} \tag{28}$$

Так как $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ представляют три взаимно перпендикулярных единичных вектора и вращение от $\mathbf{j}$ к $\mathbf{k}$ представляется с конца вектора $\mathbf{i}$ совершающимся против часовой стрелки, то

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0,\ \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0,\ \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0,\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i},\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}; \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

следовательно, в полученном выражении (28) для $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ пропадут три слагаемых, остальные же соединятся попарно, и окончательная формула будет:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) + \mathbf{j}(Z_1X_2 - Z_2X_1) + \mathbf{k}(X_1Y_2 - X_2Y_1). \tag{30}$$

Формулу (30) можно записать также в символической, легко запоминаемой форме, если воспользоваться понятием определителя 3-го порядка [1]):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{31}$$

[1]) Понятие определителя дано в ч. I, гл. VI.

Для практических вычислений можно рекомендовать такой порядок:

1) составляем таблицу из двух строк и трёх столбцов, подписывая проекции множителя под проекциями множимого:

$$\begin{Vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{Vmatrix};$$

2) для получения первой проекции произведения закрываем в этой таблице первый столбец и вычисляем оставшийся определитель 2-го порядка; чтобы получить вторую проекцию произведения, закрываем второй столбец и оставшийся определитель берём с обратным знаком; наконец, для получения третьей проекции произведения закрываем в нашей таблице третий столбец и берём оставшийся определитель 2-го порядка со своим знаком.

Например, если сомножители суть $\mathbf{A}\{3,\ 4,\ 8\}$, $\mathbf{B}\{5,\ 1,\ 7\}$, то, пользуясь таблицей

$$\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 7 \end{Vmatrix},$$

находим проекции $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$: 20, 19, -17.

Заметим, что в силу (30) условие (22) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ параллельности векторов $\mathbf{A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$ и $\mathbf{B}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$ может быть выражено равенствами

$$Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 = 0, \quad Z_1 X_2 - X_1 Z_2 = 0, \quad X_1 Y_2 - Y_1 X_2 = 0, \qquad (32)$$

или

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}, \qquad (32')$$

т. е. если векторы коллинеарны, то их проекции пропорциональны, и обратно.

Заметим, что переход от (32) к (32′) мы могли сделать, лишь если ни одно из чисел X_2, Y_2, Z_2 не обращалось в 0. Однако в силу того, что равенства (32′) имеют значительно более простой вид и постоянно применяются в дальнейшем, мы будем писать их даже и в тех случаях, когда некоторые из знаменателей равны 0. Такую запись нужно понимать, конечно, не буквально (так как на 0 делить нельзя), а условно, просто как удобную сокращённую форму записи равенств (32). Таким образом, (32′) будет в дальнейшем означать то же самое, что и (32).

Так, например, равенства

$$\frac{X_1}{0} = \frac{Y_1}{0} = \frac{Z_1}{2}$$

показывают, что $2Y_1 = 0 \cdot Z_1$, $0 \cdot Z_1 = 2X_1$, $0 \cdot X_1 = 0 \cdot Y_1$, т. е. что $X_1 = 0$ и $Y_1 = 0$.

Пример 1. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.

Так как вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет проекции $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, а вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет проекции $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$, $z_3 - z_1$, то

$$\text{пл}\ \triangle ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Пример 2. Определить синус угла A треугольника ABC с вершинами $A(1, 2, 3)$, $B(3, 4, 5)$, $C(2, 4, 7)$.

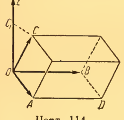
Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют соответственно проекции 2, 2, 2 и 1, 2, 4, то

$$\sin A = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{AB \cdot AC} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2+4^2}} = \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{21 \cdot 12}} = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

угол следует взять острым, если $BC^2 < AB^2 + AC^2$, и тупым, если $BC^2 > AB^2 + AC^2$. В данном случае угол A острый.

§ 14. Векторно-скалярное произведение. Выясним, что можно сказать о произведении трёх векторов. Если мы умножим скалярно два вектора **A** и **B**, то их произведение будет скаляром. При умножении третьего вектора **C** на этот скаляр мы получим вектор, коллинеарный вектору **C**.

Совсем иное дело будет, если мы перемножим два вектора векторно; в результате мы получим снова вектор $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Представляется интересным исследовать дальнейшие произведения, как скалярное, так и векторное, этого вектора на новый вектор **C**. В первом случае мы будем иметь векторно-скалярное произведение $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\mathbf{C}$, а во втором случае двойное векторное произведение $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$.



Черт. 114.

Векторно-скалярное произведение $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\mathbf{C}$ называется также смешанным произведением и обозначается $(\mathbf{ABC})$ или $\mathbf{ABC}$.

Для приложения векторно-скалярного произведения весьма важным является уяснить себе его геометрический смысл. Пусть рассматриваемые векторы **A**, **B** и **C** некомпланарны. Векторное произведение $\mathbf{E} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ есть вектор **E**, по длине численно равный площади параллелограмма $OADB$, построенного на векторах **A** и **B**, и направленный перпендикулярно к плоскости параллелограмма (черт. 114).

Скалярное произведение $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{EC}$ есть произведение длины E первого множителя на проекцию второго вектора **C** на первый. Эта проекция C_1 как проекция вектора **C** на перпендику-

ляр к плоскости равна расстоянию точки C (конца вектора **C**) от плоскости параллелограмма $OADB$, взятому со знаком $+$ или $-$.

Построим параллелепипед на векторах **A**, **B**, **C** как на рёбрах. Высота этого параллелепипеда есть абсолютная величина нашей проекции C_1, а площадь основания — параллелограмма $OADB$ — численно равна длине вектора **E**.

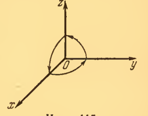
Итак, произведение $\mathbf{EC} = EC_1$ по абсолютной величине равно произведению площади основания параллелепипеда на его высоту, т. е. измеряет объём параллелепипеда.

При этом важно отметить, что наше скалярное произведение даёт объём параллелепипеда иногда с положительным, а иногда с отрицательным знаком. Положительный знак получается, если угол между векторами **E** и **C** острый; отрицательный — если он тупой. При остром угле между **E** и **C** вектор **C** расположен по ту же сторону плоскости $OADB$, что и вектор **E**, и, следовательно, из его конца C вращение от **A** к **B** будет видно так же, как и из точки E, т. е. в положительном направлении (против часовой стрелки).

При тупом угле между **E** и **C** вектор **C** расположен по другую сторону плоскости $OADB$, чем вектор **E**, и, следовательно, из его конца C вращение от **A** к **B** будет видно в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Иными словами, произведение (**ABC**) положительно, если векторы **A**, **B** и **C** образуют систему, одноимённую с основной (взаимно расположены так же, как оси x, y, z), и оно отрицательно, если векторы **A**, **B** и **C** образуют систему, разноимённую с основной.

Итак, мы получили следующую теорему:

Векторно-скалярное произведение $(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{C}$ *трёх некомпланарных векторов есть число, абсолютная величина которого выражает объём параллелепипеда, построенного на векторах* **A**, **B**, **C**, *как на рёбрах. Знак произведения положителен, если векторы* **A**, **B**, **C** *образуют систему, одноимённую с основной, и отрицателен в противном случае.*



Черт. 115.

Из этой теоремы следует, что абсолютная величина произведения $(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{C}$ останется та же, в каком бы порядке мы ни брали сомножители **A**, **B**, **C**. Что касается знака, то он будет в одних случаях положительным, в других — отрицательным; это зависит от того, образуют ли наши три вектора, взятые в определённом порядке, систему, одноимённую с основной, или нет. Заметим, что у нас оси координат расположены так, что они следуют одна за другой против часовой стрелки, если смотреть *во внутреннюю часть* трёхгранного угла (черт. 115).

Порядок следования не нарушится, если мы начнём обход со второй оси или с третьей, лишь бы он совершался в том же направлении, т. е. против часовой стрелки. При этом наши множители переставляются в круговом порядке. Таким образом, получаем теорему:

Круговая перестановка трёх сомножителей векторно-скалярного произведения не меняет его величины. Перестановка двух соседних сомножителей меняет знак произведения:

$$(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{BCA}) = (\mathbf{CAB}) = -(\mathbf{BAC}) = -(\mathbf{CBA}) = -(\mathbf{ACB}). \quad (33)$$

При каких условиях векторно-скалярное произведение может обратиться в нуль? Очевидно: а) если среди сомножителей есть хотя бы один нулевой вектор; б) если по крайней мере два из перемножаемых векторов коллинеарны (и, следовательно, их векторное произведение равно нулевому вектору), в частности:

$$(\mathbf{AAB}) = (\mathbf{ABA}) = (\mathbf{BAA}) = 0; \quad (34)$$

в) если три вектора **A**, **B**, **C** компланарны (параллельны одной и той же плоскости), потому что тогда $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{C}$ и, следовательно:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{C} = 0.$$

Объединяя все три случая, можем сказать, что $(\mathbf{ABC}) = 0$, если векторы **A**, **B**, **C** компланарны. Обратно, пусть $(\mathbf{ABC}) = 0$. Тогда, если никакой из векторов не является нулевым и никакие два из векторов не коллинеарны, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ и **C** должны быть перпендикулярны, так как их скалярное произведение равно нулю, а так как, кроме того, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ перпендикулярен к **A** и **B**, то векторы **A**, **B**, **C** компланарны. Следовательно, можно утверждать, что *равенство*

$$(\mathbf{ABC}) = 0 \quad (35)$$

есть необходимое и достаточное условие компланарности векторов **A**, **B**, **C**.

Отсюда, в частности, следует, что формулы (33), доказанные для некомпланарных векторов, остаются справедливыми и в случае их компланарности.

Пример 1. Показать, что объём треугольной пирамиды равен $\frac{1}{6}$ абсолютной величины векторно-скалярного произведения, составленного из трёх векторов-рёбер, выходящих из одной вершины.

В самом деле, объём треугольной пирамиды $ABCD$ можно рассматривать как $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, как на рёбрах:

$$\text{объём } ABCD = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD})|.$$

Пример 2. Раскрыть скобки в выражении

$$((A + B)(B + C)(C + A)).$$

Это выражение представляет $[(A + B) \times (B + C)](C + A)$. Векторное произведение будет равно:

$$A \times B + B \times B + A \times C + B \times C = A \times B + A \times C + B \times C.$$

Умножая его скалярно на $(C + A)$, получим:

$$(A \times B)C + (A \times C)C + (B \times C)C + (A \times B)A + (A \times C)A + (B \times C)A = \\ = (A \times B)C + (B \times C)A = (ABC) + (BCA) = (ABC) + (ABC) = 2(ABC).$$

§ 15. Векторно-скалярное произведение в проекциях. Обозначая через X_1, Y_1, Z_1 проекции вектора A, через X_2, Y_2, Z_2 проекции вектора B и через X_3, Y_3, Z_3 проекции вектора C, найдём сначала проекции векторного произведения $A \times B$. Согласно формуле (30) эти проекции будут:

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Зная теперь проекции первого сомножителя $A \times B$ и проекции X_3, Y_3, Z_3 второго сомножителя C, найдём по формуле (15) их скалярное произведение:

$$(ABC) = (A \times B)C = X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Но правая часть этого равенства есть не что иное, как разложение определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

по элементам последней горизонтали. Итак, окончательно мы будем иметь:

$$(ABC) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \qquad (36)$$

т. е. векторно-скалярное произведение трёх векторов, заданных своими проекциями, равно определителю 3-го порядка, составленному из этих проекций. При этом следует помнить, что в 1-й, 2-й и 3-й строках определителя пишутся в обычном порядке проекции 1-го, 2-го и 3-го из перемножаемых векторов. Пользуясь формулой (36), мы видим, что *условие* (35), *необходимое и достаточное для компланарности векторов* A $\{X_1, Y_1, Z_1\}$, B $\{X_2, Y_2, Z_2\}$, C $\{X_3, Y_3, Z_3\}$, *запишется в виде:*

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (37)$$

Пример 1. Вычислить (ABC), если A {3, 4, 2}, B {3, 5, — 1}, C {2, 3, 5}. Пользуясь формулой (36), находим:

$$(\mathbf{ABC})=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=14.$$

Пример 2. Вывести условие того, чтобы четыре точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, лежали в одной плоскости.

Искомое условие равносильно условию компланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и, следовательно, согласно формуле (37) может быть записано в виде:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 3. При тех же обозначениях, что и в примере 2, объём V треугольной пирамиды $ABCD$ выражается формулой

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

В самом деле, согласно примеру 1 из § 14 мы имеем:

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD})\right|.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ имеют соответственно проекции x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1; x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1; x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1, то находим:

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix},$$

где знак берётся одинаковый со знаком определителя.

§ 16. Двойное векторное произведение. Мы рассмотрели векторно-скалярное произведение; теперь перейдём к векторно-векторному произведению

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}.$$

В первом случае мы получили прекрасное геометрическое истолкование произведения; здесь же мы дадим формулу, значительно облегчающую вычисление. Эта формула имеет вид:

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{B}(\mathbf{AC})-\mathbf{A}(\mathbf{BC}). \tag{38}$$

Обозначая искомый результат через **D**, найдём его проекции D_x, D_y, D_z. С этой целью сначала определяем проекции вектора $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ и получаем по формуле (30):

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_x=A_yB_z-A_zB_y,\quad (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_y=A_zB_x-A_xB_z,$$
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_z=A_xB_y-A_yB_x.$$

Далее, применяя ту же формулу (30), находим:

$$D_x=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_y C_z-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_z C_y=$$
$$=(A_zB_x-A_xB_z)C_z-(A_xB_y-A_yB_x)C_y=$$
$$=B_x(A_yC_y+A_zC_z)-A_x(B_yC_y+B_zC_z).$$

Прибавив и вычтя по $A_xB_xC_x$, получим:

$$D_x = B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - A_x(B_xC_x + B_yC_y + B_zC_z).$$

Более кратко последнее выражение запишется так:

$$D_x = B_x(\mathbf{AC}) - A_x(\mathbf{BC}).$$

Аналогичные формулы получаются и для двух других проекций:

$$D_y = B_y(\mathbf{AC}) - A_y(\mathbf{BC}), \quad D_z = B_z(\mathbf{AC}) - A_z(\mathbf{BC}).$$

Зная проекции вектора $\mathbf{D}$, пишем самый вектор $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{i}D_x + \mathbf{j}D_y + \mathbf{k}D_z.$$

Внося вместо D_x, D_y, D_z только что полученные значения, имеем:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z)(\mathbf{AC}) - (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)(\mathbf{BC}),$$

или

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

Заменяя, наконец, $\mathbf{D}$ его значением, найдём требуемую формулу (38). Заметим, что в двойном векторном произведении весьма важно различать порядок перемножения. Так, например, вычисляя $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, мы получим совершенно другой вектор, а именно:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}).$$

Итак, получается формула

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}). \tag{39}$$

Из сопоставления формул (38) и (39) можно вывести следующее правило для запоминания разложения двойного векторного произведения:

Двойное векторное произведение равно произведению среднего вектора на скалярное произведение двух других, минус крайний вектор скобки, умноженный на скалярное произведение двух других.

При круговой перестановке векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ формула (38) приводит к трём разным векторам:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{A}(\mathbf{BC}),$$
$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = \mathbf{C}(\mathbf{BA}) - \mathbf{B}(\mathbf{CA}),$$
$$(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{CB}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}).$$

Складывая вместе эти три равенства, получим тождество

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = 0. \tag{40}$$

Одно из применений формулы (39) состоит в выводе *разложения данного вектора* $\mathbf{B}$ *на две компоненты, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к заданному вектору* $\mathbf{A}$. В самом деле, положив в формуле (39) $\mathbf{C} = \mathbf{A}$, найдём:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \mathbf{B}(\mathbf{AA}) - \mathbf{A}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}^2) - \mathbf{A}(\mathbf{AB}).$$

Решая это уравнение относительно B, получим:

$$\mathbf{B}=\frac{(\mathbf{AB})}{A^2}\mathbf{A}+\frac{1}{A^2}[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{A})]. \tag{41}$$

Первый из слагаемых векторов правой части, очевидно, параллелен вектору A, а второй перпендикулярен к нему.

Формула (41) для разложения упрощается, если A есть единичный вектор. Тогда $A=1$ и формула (41) примет вид:

$$\mathbf{B}=(\mathbf{AB})\mathbf{A}+\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{A}). \tag{42}$$

Мы разобрали два случая произведений трёх векторов; они играют большую роль в векторной алгебре. Произведения четырёх и большего числа векторов могут быть сведены к низшим произведениям.

Пример 1. Показать, что если $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, то

$$\mathbf{a}\times\{\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\}=a^4\mathbf{b}.$$

В самом деле:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}(\mathbf{ab})-\mathbf{b}(\mathbf{aa})=-\mathbf{b}a^2.$$

Умножая векторно слева на **a**, получим:

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]=-a^2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=a^2(\mathbf{b}\times\mathbf{a}).$$

Повторяя ту же операцию, найдём:

$$\mathbf{a}\times\{\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\}=a^2[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})]=a^2\mathbf{b}(\mathbf{aa})-a^2\mathbf{a}(\mathbf{ab})=a^4\mathbf{b},$$

что и нужно. Читателю рекомендуется проверить этот результат геометрически.

Пример 2. Вычислить $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$.

Обозначая временно $(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{e}$, произведём в векторно-скалярном произведении $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{e}$ перестановку; тогда получим:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{e}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{e})=\mathbf{a}[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]=$$
$$=\mathbf{a}[\mathbf{c}(\mathbf{bd})-\mathbf{d}(\mathbf{bc})]=(\mathbf{ac})(\mathbf{bd})-(\mathbf{ad})(\mathbf{bc}),$$

или

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{ac} & \mathbf{ad}\\ \mathbf{bc} & \mathbf{bd}\end{vmatrix}.$$

В частности, при $\mathbf{d}=\mathbf{a}$ найдём: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=a^2(\mathbf{bc})-(\mathbf{ab})(\mathbf{ac})$.

Упражнения

1. Даны две прямоугольные декартовы системы координат с одинаковыми направлениями осей. Радиус-вектор нового начала координат $\mathbf{r}_0\ \{a, b, c\}$. Найти зависимость между радиусами-векторами $\mathbf{r}\ \{x, y, z\}$ и $\mathbf{r}_1\ \{x_1, y_1, z_1\}$ произвольной точки относительно старой и новой систем.

2*. Даны две прямоугольные декартовы системы координат с общим началом. Найти выражения координат x, y, z произвольной точки относительно старой системы через координаты x_1, y_1, z_1 той же точки в новой системе.

3. Найти формулы преобразования прямоугольных декартовых координат в общем случае.

4. Доказать, что если диагонали четырёхугольника делят друг друга пополам, то четырёхугольник есть параллелограмм.

5. Найти радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника, вершины которого заданы векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Выразить также ответ в координатах.

6. Найти радиус-вектор, а также координаты центра тяжести системы трёх материальных точек M_1, M_2, M_3, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, m_3.

7. Доказать перпендикулярность векторов $\mathbf{A}\,\{3,\ 2,\ 1\}$ и $\mathbf{B}\,\{2,\ -3,\ 0\}$.

8. Найти длину и направление вектора $\mathbf{A}\,\{1,\ 1,\ 1\}$.

9. Найти проекцию вектора $\mathbf{A}\,\{4,\ -3,\ 4\}$ на направление вектора $\mathbf{B}\,\{2,\ 2,\ 1\}$.

10*. Дан параллелограмм $OACB$: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\mathbf{A}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\mathbf{B}$. Дать геометрическое истолкование формул:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2+(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2=2(A^2+B^2),\quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^2-(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2=4\,\mathbf{AB},$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})=A^2-B^2.$$

Какое значение имеет последнее из этих равенств для ромба?

11. Доказать, что вектор $\mathbf{x}=\mathbf{b}\,(\mathbf{ac})-\mathbf{a}\,(\mathbf{bc})$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{c}$.

12. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

13. Какой угол составляют между собой два вектора:

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k},\quad \mathbf{B}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}?$$

14. Определить угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если вектор $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ перпендикулярен к вектору $7\mathbf{a}-5\mathbf{b}$, а вектор $\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ перпендикулярен к вектору $7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.

15*. Вывести формулу для косинуса суммы двух углов.

16. Дано, что $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\neq 0$; можно ли отсюда заключить, что $\mathbf{a}=\mathbf{b}$?

17*. Вывести формулу для $\sin(\alpha-\beta)$.

18. Найти величину площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\mathbf{a}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.

19. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A\,(3,\ 4,\ -1)$, $B\,(2,\ 0,\ 3)$, $C\,(-3,\ 5,\ 4)$.

20. Найти площадь треугольника ABC, если известны проекции его сторон $\overrightarrow{CA}\,\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$ и $\overrightarrow{CB}\,\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$.

21. При обозначениях задачи 20 найти синус угла C.

22. Вычислить векторно-скалярное произведение $\mathbf{ij}\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

23. Показать, что $\mathbf{abc}=\mathbf{ab}\,(\mathbf{c}+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})$.

24. Показать, что векторы $\{3,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 2\}$, $\{9,\ 14,\ 16\}$ компланарны.

25. Проверить, что четыре точки $A\,(1,\ 0,\ 1)$, $B\,(4,\ 4,\ 6)$, $C\,(2,\ 2,\ 3)$ и $D\,(10,\ 14,\ 17)$ лежат в одной плоскости.

26. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках: $A\,(0,\ 0,\ 0)$, $B\,(3,\ 4,\ -1)$, $C\,(2,\ 3,\ 5)$, $D\,(6,\ 0,\ -3)$. Вычислить её объём.

27. При данных задачи 26 найти длину высоты, опущенной из вершины A.

28. Даны векторы $\mathbf{a}\,\{3,\ 0,\ -1\}$, $\mathbf{b}\,\{2,\ 4,\ 3\}$, $\mathbf{c}\,\{-1,\ 3,\ 2\}$, $\mathbf{d}\,\{2,\ 0,\ 1\}$. Вычислить $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ и $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{d})$.

29*. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми, если одна проходит через точку $A\,(3,\ 0,\ -1)$ параллельно вектору $\mathbf{B}\,\{2,\ 4,\ 3\}$, а другая проходит через точку $C\,(-1,\ 3,\ 2)$ параллельно вектору $\mathbf{D}\,\{2,\ 0,\ 1\}$.

30*. Найти расстояние от точки $A\,(3,\ 4,\ 2)$ до прямой, проходящей через точку $B\,(1,\ 2,\ 3)$ параллельно вектору $\mathbf{C}\,\{6,\ 6,\ 7\}$.

ГЛАВА III

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Уравнение поверхности. В аналитической геометрии всякую поверхность рассматривают как геометрическое место точек. В таком определении поверхности содержится свойство, общее всем её точкам. Обозначая через x, y, z координаты произвольной точки данной поверхности относительно некоторой прямоугольной системы координат, мы выражаем посредством уравнения между x, y и z свойство, общее всем точкам поверхности и только им. Таким образом составляется уравнение между переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты произвольной точки данной поверхности и только они одни. Это уравнение называют *уравнением поверхности*, входящие в него координаты x, y и z — *текущими координатами*.

Получается возможность свести изучение геометрических свойств поверхности к изучению аналитических свойств соответствующего ей уравнения.

Рассмотрим несколько простейших примеров составления уравнений заданных поверхностей.

Пример 1. Найти уравнение плоскости, делящей пополам отрезок между точками $A(1;\ 2;\ 3)$ и $B(2;\ -1;\ 4)$ и перпендикулярной к нему.

Очевидно, эта плоскость есть геометрическое место точек, равноудалённых от A и B.

Возьмём на ней произвольную точку $M(x,\ y,\ z)$. Тогда по формуле расстояния между двумя точками будем иметь:

$$AM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2},$$
$$BM = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2}.$$

Приравнивая эти расстояния, получим:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}.$$

Отсюда после возведения обеих частей равенства в квадрат и упрощений — окончательно:

$$2x - 6y + 2z - 7 = 0.$$

Это и есть уравнение данной плоскости.

Пример 2. Найти уравнение плоскости, делящей пополам двугранный угол между координатными плоскостями XOZ и YOZ и проходящей через первый октант.

Ясно, что данная плоскость является геометрическим местом точек, равноудалённых от координатных плоскостей XOZ и YOZ. Следовательно, для каждой точки этой плоскости имеет место равенство $|x|=|y|$.

Кроме того, легко усмотреть, что обе эти координаты любой точки данной плоскости имеют одинаковые знаки (в первом и пятом октантах положительные, а в третьем и седьмом — отрицательные). Поэтому у каждой её точки абсцисса равна ординате

$$x=y \quad \text{или} \quad x-y=0.$$

Это и есть уравнение данной плоскости.

Совершенно аналогично выводится и уравнение плоскости, делящей пополам другой двугранный угол между теми же координатными плоскостями XOZ и YOZ и проходящей через второй октант. Разница лишь в том, что абсцисса и ордината любой точки этой плоскости, будучи равными по абсолютной величине, противоположны по знаку.

Поэтому уравнение её имеет вид:

$$x=-y \quad \text{или} \quad x+y=0.$$

Пример 3. Найти уравнение координатной плоскости YOZ. Очевидно, эта плоскость есть геометрическое место точек, абсциссы которых равны нулю. Поэтому уравнением её будет $x=0$. Аналогично уравнение плоскости XOZ имеет вид $y=0$.

Пример 4. Найти уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости XOY и отстоящей от неё на расстоянии c в сторону положительных значений z.

Данная плоскость есть геометрическое место точек, аппликаты которых равны c. Поэтому уравнение её имеет вид $z=c$.

Пример 5. Найти уравнение сферы [1]), центр которой лежит в точке $C(a, b, c)$, а радиус равен R.

Обозначая через x, y и z координаты произвольной точки M сферы, выразим аналитически свойство, общее всем точкам M. Из определения сферы следует, что расстояние точки M до центра C есть величина постоянная, равная радиусу R, т. е.

$$CM=R. \tag{1}$$

Определим CM как расстояние между двумя точками C и M (ч. 2, гл. I, § 2), мы выразим равенство (1) с помощью текущих координат точки M:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2-(z-c)^2}=R.$$

Возвышая обе части последнего уравнения в квадрат, освободимся от радикала и получим *уравнение сферы* в окончательном виде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{2}$$

В этом уравнении постоянные a, b, c и R суть соответственно координаты центра и радиус сферы, переменные x, y и z являются координатами произвольной точки сферы. В частности, если центр сферы находится в начале координат, то $a=b=c=0$, и уравнение (2) принимает более простой вид:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{3}$$

§ 2. Геометрический смысл уравнений. Мы видели, что всякая поверхность, рассматриваемая как геометрическое место точек, может быть представлена уравнением между координатами её точек. Обратно, всякое уравнение между переменными x, y и z, вообще говоря, определяет поверхность как геометрическое место точек, координаты которых x, y и z удовлетворяют этому уравнению.

---

[1]) Сферой называется шаровая поверхность.

§ 3. Две основные задачи. Из изложенного в §§ 1 и 2 вытекает постановка двух основных задач:

1. *Дана поверхность как геометрическое место точек. Составить уравнение этой поверхности.*

2. *Дано уравнение между координатами* x, y и z. *Исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.*

§ 4. Сфера. Мы видели, что сфера радиуса R с центром в точке $C(a, b, c)$ имеет уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (2)$$

Раскрывая скобки, придадим уравнению (2) вид:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-R^2)=0. \qquad (2')$$

Уравнение (2′) содержит члены второго измерения, первого измерения и свободный член (нулевого измерения) относительно x, y и z. Такое уравнение называют уравнением второй степени. Итак, сфере соответствует уравнение второй степени относительно текущих координат. Но, очевидно, не всякое уравнение второй степени определяет сферу. Действительно, из уравнения (2′) усматриваем, что в уравнении сферы коэффициенты при квадратах координат равны, а члены с произведениями координат (xy, yz, zx) отсутствуют. Обратно, если осуществлены два условия: 1) равенство коэффициентов при x^2, y^2 и z^2, 2) отсутствие членов xy, yz, zx, то уравнение определяет сферу, так как оно приводится к виду (2′) путём деления на коэффициент при x^2 [1]).

Итак, по виду данного уравнения второй степени мы можем решить, определяет оно сферу или нет. Например, уравнение

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$$

определяет сферу, так как в нём коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а члены с произведениями координат отсутствуют. Желая узнать размер сферы и положение её в пространстве относительно данной системы координат, мы должны определить величину радиуса и координаты её центра. С этой целью данное уравнение мы приведём к виду (2). Такое преобразование есть не что иное, как представление уравнения (2′) в виде (2). Возьмём в данном примере члены, содержащие x, т. е. x^2-2x, и дополним этот двучлен до полного квадрата разности $x-1$. Получим:

$$x^2-2x=(x-1)^2-1.$$

Аналогично поступая с членами, содержащими y и z, получим:

$$y^2-4y=(y-2)^2-4; \; z^2=(z-0)^2$$

[1]) В частном случае уравнение может определять сферу нулевого радиуса (т. е. точку) или мнимое место точек.

После этого данное уравнение запишется так:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=9.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2), усматриваем, что

$$a=1,\ b=2,\ c=0,\ R=3.$$

§ 5. Цилиндрические поверхности. Положим, что данное уравнение не содержит переменной z:

$$F(x,\ y)=0.$$

На плоскости координат xOy это уравнение определяет некоторую линию L — геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Этому уравнению удовлетворяют также координаты всех тех точек пространства, у которых две первые координаты совпадают с координатами любой точки линии L, т. е. тех точек пространства, которые проектируются на плоскость xOy в точки линии L. Совокупность таких точек есть поверхность, описанная прямой, параллельной оси Oz и пересекающей линию L (черт. 116). Вообще поверхность, описываемая прямой, остающейся параллельной некоторой данной прямой и пересекающей данную линию L, называется *цилиндрической*. Линия L называется её *направляющей*, а все возможные положения движущейся прямой — *образующими*. Итак, *уравнение* $F(x,\ y)=0$ *определяет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси* Oz.

Черт. 116.

Обратно, всякая цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz, может быть представлена уравнением вида $F(x,\ y)=0$. Действительно, направляющая линия L может быть в этом случае взята в плоскости координат xOy и её уравнение, рассматриваемое в пространстве, будет определять данную цилиндрическую поверхность.

Точно так же, если уравнение не содержит переменного x (или y), то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox (или Oy).

Пример 1. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

определяет цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть эллипс, лежащий в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (*эллиптический цилиндр*).

Пример 2. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

определяет цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть гипербола, лежащая в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (*гиперболический цилиндр*).

Пример 3. Уравнение

$$y^2 = 2px \tag{6}$$

определяет цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть парабола, лежащая в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (*параболический цилиндр*).

§ 6. Уравнения линии в пространстве. Всякую линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. Пусть

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad f_1(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

суть уравнения тех поверхностей, пересечение которых даёт линию L. Координаты любой точки линии L удовлетворяют обоим уравнениям (7), так как эта точка лежит одновременно на обеих поверхностях. Итак, линия в пространстве рассматривается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе двух уравнений (7). Обратно, система двух уравнений (7) определяет линию в пространстве как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этой системе уравнений. Уравнения (7) называют *уравнениями линии L в пространстве*.

Очевидно, можно различным образом выбирать те поверхности, пересечением которых является данная линия L, и это обстоятельство соответствует тому факту, что вместо системы (7) можно взять любую другую систему двух уравнений, ей равносильную. Так, например, уравнения оси Oz будут:

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Уравнения

$$x + y = 0 \text{ и } x - y = 0$$

также определяют ось Oz.

Проведём через линию L две цилиндрические поверхности с образующими, параллельными осям Oy и Oz. Уравнения этих цилиндрических поверхностей будут иметь вид (§ 5):

$$F(x, z) = 0, \quad F_1(x, y) = 0.$$

Так как линию L можно рассматривать как пересечение этих цилиндрических поверхностей, то система уравнений

$$F(x, z) = 0, \quad F_1(x, y) = 0 \tag{8}$$

определяет линию L. Каждое из уравнений (8), рассматриваемое в соответствующей плоскости координат, представляет, следовательно, проекцию данной линии L на плоскости xOz и xOy. Аналитически уравнения (8) получаются из уравнений (7) путём исключения переменных y и z.

Пример. Написать уравнения окружности, получающейся в пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=1$ с плоскостью $z=\frac{1}{2}$.

Искомые уравнения окружности будут:

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad z=\frac{1}{2}\quad \text{или}\quad x^2+y^2=\frac{3}{4},\qquad z=\frac{1}{2}.$$

Одно первое уравнение последней системы на плоскости координат xOy изображает окружность, являющуюся проекцией искомой окружности на эту плоскость. Эта проекция совпадает по размерам с искомой окружностью, так как последняя лежит в плоскости, параллельной плоскости проекций.

§ 7. Пересечение трёх поверхностей. Если три поверхности, выражаемые соответственно уравнениями

$$F(x, y, z)=0,$$
$$F_1(x, y, z)=0,$$
$$F_2(x, y, z)=0,$$

имеют общую точку, то координаты её удовлетворяют каждому из этих уравнений.

Очевидно, справедливо и обратное предложение — если координаты какой-нибудь точки удовлетворяют этим трём уравнениям, то эта точка принадлежит всем трём поверхностям. Поэтому, чтобы найти точки пересечения трёх поверхностей, нужно совместно решить соответствующие им уравнения. Каждое действительное решение этой системы трёх уравнений даст точку пересечения поверхностей.

Если же система уравнений несовместна или все решения её мнимые, то точек, общих для всех трёх данных поверхностей, нет.

Упражнения

1. Составить уравнение сферы радиуса 4 с центром в точке (—1, 2, 3).
2. Найти центр и радиус сферы

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0.$$

3. Найти центр и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-2x=0$.
4. Найти центр и радиус сферы

$$2x^2+2y^2+2z^2-5y-8=0.$$

5. Составить уравнение сферы с центром в точке (1, 3, —2), проходящей через начало координат.
6. Составить уравнение сферы, проходящей через начало координат и точки (2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, —1).
7. Составить уравнение проекции линии

$$x^2+y^2-z=0,\qquad z=x-1$$

на плоскость координат xOy.

8. Какую линию определяет система уравнений

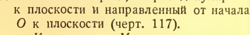
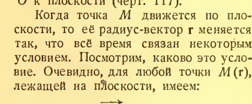
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad z=c?$$

9. Какую поверхность определяет уравнение $x^2+y^2-2x=0$?

ГЛАВА IV

ПЛОСКОСТЬ

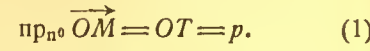
§ 1. Нормальное уравнение плоскости. Положение плоскости в пространстве будет вполне определено, если зададим её расстояние p от начала O, т. е. длину перпендикуляра OT, опущенного из точки O на плоскость, и единичный вектор $\mathbf{n}^0$, перпендикулярный к плоскости и направленный от начала O к плоскости (черт. 117).

Черт. 117.

Когда точка M движется по плоскости, то её радиус-вектор $\mathbf{r}$ меняется так, что всё время связан некоторым условием. Посмотрим, каково это условие. Очевидно, для любой точки $M(\mathbf{r})$, лежащей на плоскости, имеем:

$$\text{пр}_{\mathbf{n}^0}\overrightarrow{OM} = OT = p. \qquad (1)$$



Это условие имеет место лишь для точек плоскости; оно нарушается, если точка M лежит вне плоскости. Таким образом, равенство (1) выражает свойство, общее всем точкам плоскости и только им. Согласно § 7 гл. II имеем:

$$\text{пр}_{\mathbf{n}^0}\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}\mathbf{n}^0,$$

и, значит, уравнение (1) может быть переписано в виде:

$$\mathbf{r}\mathbf{n}^0 - p = 0. \qquad (1')$$

Уравнение (1′) выражает собой условие, при котором точка $M(\mathbf{r})$ лежит на данной плоскости, и называется ***нормальным уравнением этой плоскости.*** Радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки M плоскости называется ***текущим радиусом-вектором.***

Уравнение (1′) плоскости записано в векторной форме. Переходя к координатам и помещая начало координат в начале векторов — точке O, заметим, что проекциями единичного вектора $\mathbf{n}^0$ на оси координат Ox, Oy, Oz служат косинусы углов α, β, γ, составлен-

ных осями с этим вектором, а проекциями радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки M служат координаты x, y, z точки M, т. е. имеем:

$$\mathbf{n}^0\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\} \text{ и } \mathbf{r}\{x,\ y,\ z\}.$$

Уравнение (1′) переходит в координатное:

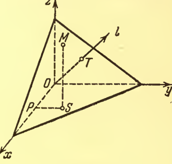
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (2)$$

При переводе векторного уравнения (1′) плоскости в координатное уравнение (2) мы воспользовались формулой (15) § 9 гл. II, выражающей скалярное произведение через проекции векторов. Уравнение (2) выражает собой условие, при котором точка $M(x, y, z)$ лежит на данной плоскости, и называется *нормальным уравнением этой плоскости в координатной форме*. Полученное уравнение (2) — первой степени относительно x, y, z, т. е. *всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.*

Заметим, что выведенные уравнения (1′) и (2) остаются в силе и тогда, когда $p=0$, т. е. данная плоскость проходит через начало координат. В этом случае за $\mathbf{n}^0$ можно принять любой из двух единичных векторов, перпендикулярных к плоскости и отличающихся один от другого направлением.

Замечание. Нормальное уравнение плоскости (2) можно вывести, не пользуясь векторным методом.

Возьмём произвольную плоскость и проведём через начало координат перпендикулярно к ней прямую l. Установим на этой прямой положительное направление от начала координат к плоскости (если бы выбранная плоскость проходила через начало координат, то направление на прямой можно было бы взять любое).



Черт. 118.

Положение этой плоскости в пространстве вполне определяется расстоянием её p от начала координат, т. е. длиной отрезка оси l от начала координат до точки пересечения её с плоскостью (на черт. 118 — отрезок OT) и углами α, β, γ между осью l и координатными осями. Когда точка M с координатами x, y, z движется по плоскости, то её координаты меняются так, что всё время связаны некоторым условием. Посмотрим, каково это условие.

Построим на черт. 118 координатную ломаную линию $\overline{OPSM}$ произвольной точки M плоскости. Возьмём проекцию этой ломаной

на ось l. Заметив, что проекция ломаной равна проекции её замыкающего отрезка (гл. I, § 3), будем иметь:

$$\text{пр}\,\overline{OPSM} = \text{пр}\,\overline{OM} = p. \qquad (3)$$

С другой стороны, известно, что проекция ломаной равна сумме проекций её звеньев (гл. I, § 3); следовательно, равенство (3) перепишется так:

$$\text{пр}\,\overline{OP} + \text{пр}\,\overline{PS} + \text{пр}\,\overline{SM} = p. \qquad (4)$$

Так как проекция отрезка равна его величине, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью, на которой лежит отрезок (гл. I, § 3), то

$$\text{пр}\,\overline{OP} = x\cos\alpha,\ \ \text{пр}\,\overline{PS} = y\cos\beta,\ \ \text{пр}\,\overline{SM} = z\cos\gamma.$$

Подставляя эти значения в равенство (4), получим:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (2)$$

Как уже указывалось, уравнение (2) выражает собой условие, при котором точка $M(x, y, z)$ лежит на данной плоскости, и называется *нормальным уравнением* этой плоскости. Полученное уравнение (2) — первой степени относительно x, y, z, т. е. *всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.*

§ 2. Геометрический смысл уравнения первой степени между тремя переменными. Приведение общего уравнения первой степени к нормальному виду. В предыдущем параграфе было доказано, что всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени. Теперь докажем обратную теорему: *всякое уравнение первой степени между тремя переменными определяет плоскость.*

Возьмём уравнение первой степени общего вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (5)$$

Будем рассматривать A, B и C как проекции на оси координат Ox, Oy и Oz некоторого постоянного вектора $\mathbf{n}$, а x, y и z как проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки M. Тогда уравнение (5) может быть переписано в векторной форме следующим образом (гл. I, § 9):

$$\mathbf{rn} + D = 0. \qquad (5')$$

Покажем, что уравнение (5′) может быть приведено к нормальному виду (1′).

Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть $D < 0$.

Тогда разделим уравнение (5′) на модуль вектора $\mathbf{n}$, т. е. на n. Получим:

$$\mathbf{rn}^0 + \frac{D}{n} = 0,$$

так как $\frac{\mathbf{n}}{n} = \mathbf{n}^0$. Обозначив отрицательное число $\frac{D}{n}$ через $-p$, где p положительно, будем иметь нормальное уравнение $\mathbf{r}\mathbf{n}^0 - p = 0$.

2) Если $D > 0$, то разделим уравнение (5′) на $(-n)$, после чего оно примет вид $\mathbf{r}(-\mathbf{n}^0) - \frac{D}{n} = 0$.

Обозначив же положительное число $\frac{D}{n}$ через p, получим нормальное уравнение.

3) Если $D = 0$, то уравнение (5′) можно разделить как на n, так и на $(-n)$. В первом случае мы получим $\mathbf{r}\mathbf{n}^0 = 0$, а во втором $\mathbf{r}(-\mathbf{n}^0) = 0$. Каждое из них является нормальным уравнением вида (1′).

Таким образом, уравнение (5′) всегда может быть приведено к нормальному виду (1′). Но нормальное уравнение определяет плоскость. Следовательно, уравнение (5′), а значит, и исходное уравнение (5), определяет плоскость. Таким образом, теорема доказана. Уравнение (5) называется общим уравнением плоскости.

Условимся всякий вектор, отличный от нулевого, перпендикулярный к плоскости, называть нормальным вектором плоскости. Тогда, очевидно, вектор $\mathbf{n}\{A, B, C\}$ будет одним из нормальных векторов плоскости. Таким образом, коэффициенты A, B, C при текущих координатах в уравнении (5) имеют простой геометрический смысл: они являются проекциями нормального вектора на координатные оси. Свободный член D непосредственного геометрического смысла не имеет, но его абсолютная величина, разделённая на длину n нормального вектора $\mathbf{n}$, равна расстоянию плоскости от начала координат.

Легко усмотреть, что нормальное уравнение плоскости в координатной форме (2) есть частный случай общего уравнения (5). Это — тот случай, когда за нормальный к плоскости вектор выбран единичный вектор, направленный из начала координат перпендикулярно к данной плоскости.

Из предыдущего мы усматриваем способ приведения уравнения (5) или (5′) к нормальному виду (2) или (1′).

Чтобы привести общее уравнение плоскости к нормальному виду, надо его разделить на длину вектора $\mathbf{n}\{A, B, C\}$, *взяв её со знаком* $+$ *или* $-$, *смотря по тому, будет ли свободный член* D *отрицательным или положительным. Иными словами, для приведения общего уравнения* (5) *первой степени к нормальному виду нужно умножить его на множитель*

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{6}$$

причём знак множителя следует взять противоположным знаку свободного члена D в уравнении (5) (пр $D = 0$ знак множителя выбирается произвольно). Этот множитель M носит название *нормирующего множителя.*

После умножения на M уравнение (5) принимает вид:

$$MAx + MBy + MCz + MD = 0$$

и совпадает с нормальным уравнением (2). Следовательно, имеем:

$$MA = \cos\alpha,\ MB = \cos\beta,\ MC = \cos\gamma,\quad MD = -p. \tag{7}$$

Подставив найденное по формуле (6) значение M в последние равенства, получим формулы для $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\beta &= \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & p &= \mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В этих формулах (8) надо брать верхние знаки, если $D < 0$ ($M > 0$), и нижние в противном случае.

З а м е ч а н и е 1. Установить геометрический смысл уравнения первой степени, а также найти правило приведения общего уравнения к нормальному виду, можно не прибегая к векторному методу. Отправляясь от уравнения первой степени общего вида (5), спросим себя, каково геометрическое место тех точек пространства, координаты которых x, y, z удовлетворяют нашему уравнению? Мы покажем, что искомое геометрическое место точек будет п л о с к о с т ь. С этой целью умножим наше уравнение на постоянный множитель M, подобрав его так, чтобы получилось нормальное уравнение, т. е. уравнение вида (2). Уравнение (5) преобразуется к виду

$$MAx + MBy + MCz + MD = 0. \tag{9}$$

Чтобы уравнение (9) было вида, одинакового с уравнением (2), нужно положить

$$MA = \cos\alpha,\ MB = \cos\beta,\ MC = \cos\gamma,\ MD = -p. \tag{10}$$

Из равенств (10) легко найдём неизвестные M, α, β, γ и p выраженными через известные коэффициенты A, B, C, D, если воспользуемся вспомогательным равенством

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{11}$$

(ч. 2, гл. I, § 4). Действительно, возводя в квадрат первые три из равенств (10) и складывая, найдём:

$$M^2A^2 + M^2B^2 + M^2C^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

или

$$M^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1,$$

откуда

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{6}$$

В формуле (6) нужно брать знак, противоположный знаку свободного члена, как это видно из последнего равенства (10). Подставив найденное значение M в равенства (10), получим формулы (8) для $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p.

Итак, уравнение (5) приводится к нормальному виду путём умножения его на множитель M, определяемый по формуле (6). Этот множитель M носит название *нормирующего множителя*. Так как нормальное уравнение определяет, как мы видели в предыдущем параграфе, плоскость, то отсюда следует, что и *общее уравнение* (5) *определяет плоскость*. Итак, *всякое уравнение первой степени между x, y, z определяет плоскость* как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Замечание 2. Если два уравнения определяют одну и ту же плоскость, то соответствующие коэффициенты их пропорциональны. Действительно, будучи приведены к нормальному виду, оба эти уравнения, перейдут в одно и то же нормальное уравнение.

Коэффициенты каждого из них пропорциональны соответствующим коэффициентам этого нормального уравнения, а потому пропорциональны и между собой.

Пример. Уравнение плоскости $x-2y+2z-3=0$ привести к нормальному виду.

Нормирующий множитель будет:

$$M=+\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{3};$$

умножая на него данное уравнение, получим:

$$\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0.$$

Для данной плоскости, следовательно, имеем:

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=-\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3},\quad p=1.$$

§ 3. Исследование общего уравнения плоскости.

Посмотрим, какие частные положения относительно осей координат занимает плоскость, заданная уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{12}$$

если некоторые коэффициенты этого уравнения обращаются в нуль.

Если $D=0$, то уравнению (12) удовлетворяют $x=y=z=0$, т. е. координаты начала; таким образом, плоскость проходит через начало координат. Если $C=0$, то уравнение (12) будет:

$$Ax+By+D=0. \tag{12'}$$

Рассматривая это уравнение на плоскости xOy, мы будем иметь прямую линию. Рассматривая же уравнение (12′) в пространстве, мы будем иметь геометрическое место тех точек, которые проектируются на плоскость xOy в точки указанной прямой. Таким образом,

уравнение (12') определяет плоскость, параллельную оси Oz[1]. Аналогично, если $B=0$, то уравнение

$$Ax+Cz+D=0$$

определяет плоскость, параллельную оси Oy, и, наконец, если $A=0$, то уравнение

$$By+Cz+D=0$$

определяет плоскость, параллельную оси Ox. Вообще, если в уравнении плоскости отсутствует координата z, y или x, то плоскость параллельна соответственно оси Oz, Oy или Ox.

Допустим теперь, что два коэффициента равны нулю, например

$$D=C=0.$$

Уравнение

$$Ax+By=0$$

определяет плоскость, проходящую через начало координат параллельно оси Oz, т. е. это будет плоскость, проходящая через ось Oz. Аналогично уравнение вида

$$Ax+Cz=0$$

определяет плоскость, проходящую через ось Oy, а уравнение

$$By+Cz=0$$

определяет плоскость, проходящую через ось Ox.

Если равны нулю два коэффициента при текущих координатах, например $A=B=0$, то уравнение $Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox и оси Oy, т. е. плоскость, параллельную плоскости координат xOy. Также уравнения $By+D=0$ и $Ax+D=0$ определяют плоскости, параллельные соответственно плоскостям координат xOz и yOz.

Если, наконец, три коэффициента равны нулю, например $B=C=D=0$, то уравнение $Ax=0$ или $x=0$ определяет плоскость координат yOz.

Также уравнения $By=0$ и $Cz=0$ определяют соответственно плоскости координат xOz и xOy.

§ 4. Уравнение плоскости в отрезках. Рассмотрим плоскость, пересекающую все три координатные оси и не проходящую через начало координат. Уравнение этой плоскости можно записать в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{13}$$

---

[1]) Тот же вывод мы получим сразу, если припомним, что A, B и C являются проекциями нормального к данной плоскости вектора. Если $C=0$, то этот вектор перпендикулярен к оси Oz, а это значит, что сама плоскость параллельна оси Oz.

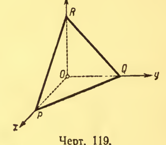
где ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю. Обозначим через a, b, c величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат (черт. 119).

Так как точка $P(a, 0, 0)$ лежит на плоскости, то её координаты удовлетворяют уравнению (13):

$$Aa + D = 0,$$

или

$$A = -\frac{D}{a}. \qquad (14)$$



Черт. 119.

Аналогично координаты точки $Q(0, b, 0)$ должны удовлетворять уравнению (13), что даёт:

$$Bb + D = 0,$$

или

$$B = -\frac{D}{b}. \qquad (14')$$

Наконец, координаты точки $R(0, 0, c)$ удовлетворяют уравнению (13):

$$Cc + D = 0,$$

или

$$C = -\frac{D}{c}. \qquad (14'')$$

Подставляя значения A, B и C из равенств (14), (14′), (14″) в уравнение (13) плоскости, получим:

$$-D\frac{x}{a} - D\frac{y}{b} - D\frac{z}{c} + D = 0.$$

Сокращая на D, которое в силу предположения не равно нулю, найдём:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0,$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (15)$$

Это и есть искомое *уравнение плоскости в отрезках*.

Пример. Уравнение плоскости $3x - 4y + z - 5 = 0$ написать в отрезках. Полагая в данном уравнении $y = z = 0$, найдём величину a:

$$3x - 5 = 0, \text{ откуда } x = \frac{5}{3}, \text{ т. е. } a = \frac{5}{3}.$$

Аналогично, полагая $x = z = 0$, найдём величину b:

$$-4y - 5 = 0, \text{ откуда } y = -\frac{5}{4}, \text{ т. е. } b = -\frac{5}{4}.$$

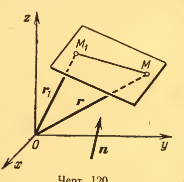
Наконец, полагая $x = y = 0$, найдём величину c:

$$z - 5 = 0, \text{ откуда } z = 5, \text{ т. е. } c = 5.$$

Следовательно, уравнение плоскости в отрезках будет:

$$\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}+\frac{z}{5}=1.$$

§ 5. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Пусть требуется найти уравнение плоскости, проходящей через точку M_1, заданную радиусом-вектором $\mathbf{r}_1\{x_1, y_1, z_1\}$. Возьмём любой вектор $\mathbf{n}\{A, B, C\}\neq\mathbf{0}$ и найдём уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к нему. Обозначим эту плоскость через P (черт. 120).



Черт. 120.

Проведём радиус-вектор $\mathbf{r}\{x, y, z\}$ в любую точку M плоскости. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M}$ или $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, как лежащий в плоскости P, будет перпендикулярен к вектору $\mathbf{n}$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)=0. \qquad (16)$$

Это равенство есть условие того, что точка M лежит в плоскости P. Оно справедливо для всех точек этой плоскости и нарушается, как только точка M окажется вне плоскости P.

Равенство (16) есть векторное уравнение плоскости P.

Выражая скалярное произведение векторов через их проекции, получим уравнение той же плоскости в координатной форме

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (17)$$

Как видно из вывода, вектор $\mathbf{n}$, а потому и его проекции A, B и C совершенно произвольны (но, конечно, мы исключаем случай $A=B=C=0$, так как $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$).

Изменяя значения A, B и C, мы будем получать различные плоскости, проходящие через данную точку M_1. Таким образом, уравнение (17) при любых значениях коэффициентов A, B и C выражает плоскость, проходящую через данную точку.

Замечание. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, можно вывести, не пользуясь векторным методом. Пусть нужно найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Возьмём искомое уравнение в виде

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Так как по условию искомая плоскость проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то координаты этой точки должны удовлетворять этому уравнению. Отсюда получаем условие:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

Вычитая это тождество из первоначального уравнения, получаем искомое уравнение:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \qquad (17)$$

где A, B и C произвольны. Изменяя любым способом их значения, мы будем получать разные плоскости. Но все они будут проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, в чём легко убедиться также непосредственно подстановкой координат этой точки в уравнение (17). Оно будет обращаться в тождество независимо от значений коэффициентов.

Таким образом, уравнение (17) при любых значениях коэффициентов A, B и C (кроме случая $A=B=C=0$) выражает плоскость, проходящую через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 2, 3)$.

Уравнение искомой плоскости будет:

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0.$$

§ 6. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Пусть нужно найти уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, не лежащие на одной прямой. Обозначая их радиусы-векторы через $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$, а текущий радиус-вектор через $\mathbf{r}$, мы легко получим искомое уравнение в векторной форме. В самом деле, векторы $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$ должны быть компланарны (они все лежат в искомой плоскости). Следовательно, векторно-скалярное произведение этих векторов должно быть равно нулю:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0. \qquad (18)$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ в векторной форме.

Переходя к координатам, получим уравнение в координатах:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \qquad (18')$$

где $\mathbf{r}\,\{x, y, z\}$, $\mathbf{r}_1\,\{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{r}_2\,\{x_2, y_2, z_2\}$, $\mathbf{r}_3\,\{x_3, y_3, z_3\}$.

Если бы три данные точки лежали на одной прямой, то векторы $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$ были бы коллинеарны. Поэтому соответствующие элементы двух последних строк определителя, стоящего в уравнении (18′), были бы пропорциональны и определитель тождественно равен нулю. Следовательно, уравнение (18′) обращалось бы в тождество при любых значениях x, y и z. Геометрически это значит, что через каждую точку пространства проходит плоскость, в которой лежат и три данные точки.

Замечание 1. Эту же задачу можно решить, не пользуясь векторами.

Обозначая координаты трёх данных точек соответственно через x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 и x_3, y_3, z_3, напишем уравнение любой плоскости, проходящей через первую точку:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (17)$$

Чтобы получить уравнение искомой плоскости, нужно потребовать, чтобы уравнение (17) удовлетворялось координатами двух других точек:

$$\left.\begin{aligned} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0,\\ A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Из уравнений (19) нужно определить отношения двух коэффициентов к третьему и внести найденные значения в уравнение (17).

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки (1, 2, 3), (— 1, 0, 0) и (3, 0, 1).

Уравнение плоскости, проходящей через первую из данных точек, будет:

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0. \qquad (17')$$

Условия прохождения плоскости (17′) через две другие точки и первую точку суть:

$$2A+2B+3C=0 \text{ и } 2A-2B-2C=0, \qquad (19')$$

или

$$2\frac{A}{C}+2\frac{B}{C}+3=0; \quad 2\frac{A}{C}-2\frac{B}{C}-2=0.$$

Складывая второе уравнение с первым, найдём:

$$4\frac{A}{C}+1=0, \text{ откуда } \frac{A}{C}=-\frac{1}{4}.$$

Подставляя во второе уравнение, получим:

$$\frac{B}{C}=-\frac{5}{4}.$$

Итак, $A:B:C=1:5:(-4)$.

Подставляя в уравнение (17′) вместо A, B, C соответственно 1, 5, —4 (числа, им пропорциональные), получим:

$$(x-1)+5(y-2)-4(z-3)=0,$$

или

$$x+5y-4z+1=0.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости проходящей через точки (0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2).

Уравнение любой плоскости, проходящей через точку (0, 0, 0), будет:

$$Ax+By+Cz=0.$$

Условия прохождения этой плоскости, через точки (1, 1, 1) и (2, 2, 2) суть:

$$A+B+C=0 \text{ и } 2A+2B+2C=0.$$

Сокращая второе уравнение на 2, видим, что для определения двух неизвестных отношений $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ имеет одно уравнение

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}+1=0.$$

Отсюда получим $\frac{A}{C}=-\frac{B}{C}-1$. Подставляя теперь в уравнение плоскости $\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+z=0$ вместо $\frac{A}{C}$ его значение, найдём:

$$\left(-\frac{B}{C}-1\right)x+\frac{B}{C}y+z=0$$

или

$$(B+C)x-By-Cz=0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости; оно зависит от произвольных количеств B, C $\left(\text{а именно, от отношения } \frac{B}{C}\right)$, т. е. имеется бесчисленное множество плоскостей, проходящих через три данные точки (три данные точки лежат на одной прямой линии).

Замечание 2. Задача о проведении плоскости через три данные точки, не лежащие на одной прямой, легко решается в общем виде, если воспользоваться определителями. Действительно, так как в уравнениях (17) и (19) коэффициенты A, B, C не могут быть одновременно равны нулю, то, рассматривая эти уравнения как однородную систему с тремя неизвестными A, B, C, пишем необходимое и достаточное условие существования решения этой системы, отличного от нулевого (ч. 1, гл. VI, § 6):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Разложив этот определитель по элементам первой строки, получим уравнение первой степени относительно текущих координат x, y, z, которому будут удовлетворять, в частности, координаты трёх данных точек.

В этом последнем можно также убедиться и непосредственно, если подставить в уравнение, записанное с помощью определителя, координаты любой из данных точек вместо x, y, z. В левой части получается определитель, у которого либо элементы первой строки нули, либо имеются две одинаковые строки. Таким образом, составленное уравнение представляет плоскость, проходящую через три данные точки.

§ 7. Угол между двумя плоскостями. Пусть уравнения данных плоскостей будут:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \quad (20)$$

Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями (в случае параллельности плоскостей угол между ними можно считать равным 0 или π по желанию). Один из этих двугранных углов равен углу φ между векторами $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$,

перпендикулярными к данным плоскостям. Угол φ определяется согласно формуле (17′) из § 10 гл. II, а именно:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (21)$$

Замечание. Вывод формулы (21) можно выполнить, не прибегая к векторам. Чтобы вычислить угол φ между плоскостями, заданными уравнениями (20), заметим, что один из двух смежных двугранных углов, образованных плоскостями, равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям из начала координат. Написав нормальные уравнения плоскостей (20) в виде

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1 = 0,\\ x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2 = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (20')$$

имеем (гл. I, § 4):

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \qquad (22)$$

Так как (см. формулы 8)

$$\cos\alpha_1 = \pm\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \cos\alpha_2 = \pm\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\cos\beta_1 = \pm\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \cos\beta_2 = \pm\frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\cos\gamma_1 = \pm\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \cos\gamma_2 = \pm\frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

то, подставляя эти значения в равенство (22), найдём:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (21')$$

В этой формуле (21′) можно брать любой знак (+ или —), что соответствует выбору одного из двух смежных двугранных углов.

§ 8. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. В случае перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (20)$$

угол между ними равен 90°, т. е. $\cos\varphi = 0$. Поэтому из формулы (21) имеем *условие перпендикулярности плоскостей* (20):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (23)$$

Замечание. Это условие (23) получится сразу, если заметим, что скалярное произведение нормальных векторов $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ должно быть равно нулю.

Условие *параллельности плоскостей* в векторной форме может быть записано так: $\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2$, где $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ обозначают векторы, пер-

пендикулярные к данным плоскостям. Переходя к проекциям, перепишем это условие таким образом:

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2,$$

что равносильно условию

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{24}$$

Замечание. Условие (24) без векторов можно установить так: в случае параллельности плоскостей (20) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \pm\cos\alpha_2, \\ \cos\beta_1 &= \pm\cos\beta_2, \\ \cos\gamma_1 &= \pm\cos\gamma_2. \end{aligned}\right\} \tag{24'}$$

Заменяя здесь косинусы их выражениями через коэффициенты уравнений (20), получим:

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \pm\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$
$$\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \pm\frac{B_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$
$$\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \pm\frac{C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

откуда находим:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{24}$$

Обратно, если выполнено условие (24), то плоскости параллельны. В самом деле, уравнения этих плоскостей будут:

$$\lambda A_2 x + \lambda B_2 y + \lambda C_2 z + D_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

где λ обозначает величину каждого отношения равенств (24). Деля первое уравнение на λ, получим:

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + \frac{D_1}{\lambda} = 0.$$

Следовательно, выполняются соотношения (24′), и плоскости параллельны.

Пример 1. Показать, что плоскости $x + y - z - 1 = 0$ и $2x + 2y - 2z + 3 = 0$ параллельны между собой.

Условие параллельности (24) здесь выполняется:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2}.$$

Пример 2. Показать, что плоскости

$$x + y + z = 0 \quad \text{и} \quad x + y - 2z + 3 = 0$$

перпендикулярны между собой.

Условие перпендикулярности (23) здесь выполняется:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0.$$

Задача I. *Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.*

Пусть даны точка $M(x_1, y_1, z_1)$ и плоскость своим уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Напишем уравнение произвольной плоскости, проходящей через данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (17)$$

Чтобы эта плоскость была параллельна данной плоскости, нужно выполнить условие

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1};$$

следовательно, можем взять:

$$A = A_1, \ B = B_1, \ C = C_1.$$

Подставляя эти значения A, B и C в уравнение плоскости, найдём:

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно плоскости $x + y + z = 1$.

Здесь $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ и $A_1 = B_1 = C_1 = 1$. Следовательно, уравнение искомой плоскости будет:

$$x + y + z = 0.$$

Задача II. *Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки перпендикулярно к данной плоскости.*

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и плоскость своим уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Напишем уравнение любой плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (17)$$

Теперь напишем условия прохождения этой плоскости через точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и перпендикулярности с данной плоскостью:

$$\left.\begin{aligned} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Определяя из (25) отношения двух коэффициентов A, B и C к третьему и подставляя их в уравнение плоскости, получим искомое уравнение.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки (1, 1, 1) и (0, 1, — 1) перпендикулярно к плоскости $x + y + z = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через первую из данных точек, будет:

$$A(x - 1) + B(y - 1) + C(z - 1) = 0.$$

Условия прохождения этой плоскости через точку $(0, 1, -1)$ и перпендикулярности к данной плоскости суть соответственно:

$$A+2C=0 \text{ и } A+B+C=0.$$

Из первого условия получаем $\frac{A}{C}=-2$. Деля второе на C, найдём:

$$\frac{B}{C}=-\frac{A}{C}-1=2-1=1.$$

Деля уравнение плоскости на C и подставляя вместо $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ найденные значения, получим:

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0,$$

или

$$2x-y-z=0.$$

Замечание. Задача II может быть решена в общем виде, если воспользоваться определителями. Действительно, из уравнений (17) и (25), представляющих однородную систему с неизвестными A, B и C, получаем (ч. 1, гл. VI, § 6):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}=0.$$

§ 9. Точка пересечения трёх плоскостей. Чтобы найти координаты точки пересечения трёх плоскостей, данных своими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,$$

нужно решить эти уравнения совместно относительно x, y и z, так как координаты точки пересечения должны одновременно удовлетворять уравнениям всех трёх плоскостей.

Пример. Найти точку пересечения плоскостей.

$$x-y+z=0,\ x+2y-1=0,\ x+y-z+2=0.$$

Решая эти уравнения совместно, получим координаты искомой точки:

$$x=-1,\ y=1,\ z=2.$$

Полное решение этой задачи в общем виде может быть дано при помощи определителей. Согласно результатам исследования, произведённого в § 7 гл. VI ч. 1, имеем: если определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то три плоскости пересекаются в единственной точке; если определитель Δ равен нулю, но по крайней мере один

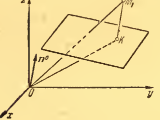
из его миноров отличен от нуля, то три плоскости либо не имеют общей точки, либо пересекаются в бесконечном множестве точек. В первом случае среди определителей 3-го порядка, принадлежащих таблице

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{matrix}$$

есть по крайней мере один, отличный от нуля, и тогда одна из плоскостей параллельна линии пересечения двух других. Во втором случае все определители 3-го порядка этой таблицы равны нулю и все три плоскости проходят через одну прямую.

Если, наконец, вместе с определителем Δ все его миноры равны нулю, то три плоскости либо не имеют общей точки, либо пересекаются в бесконечном множестве точек. В первом случае среди определителей 2-го порядка, принадлежащих выписанной таблице, есть хоть один, отличный от нуля, и тогда все три плоскости параллельны между собой; во втором же случае все определители 2-го порядка этой таблицы равны нулю и три плоскости совпадают.

§ 10. Расстояние от точки до плоскости. Условимся называть отклонением данной точки от данной плоскости число d, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, взятой со знаком плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости, и со знаком минус, если они лежат по одну сторону от плоскости; для точек, лежащих на плоскости, отклонение равно нулю. Ясно, что расстояние от точки до плоскости равно абсолютной величине отклонения.



Черт. 121.

Пусть требуется найти расстояние от данной точки M_1 ($\mathbf{r}_1$) до плоскости, заданной нормальным векторным уравнением

$$\mathbf{r}\mathbf{n}^0 - p = 0.$$

Задача состоит в том, чтобы найти длину перпендикуляра M_1K, опущенного из точки M_1 на плоскость (черт. 121). Замечая, что вектор $\overrightarrow{KM_1}$ параллелен единичному вектору $\mathbf{n}^0$, мы можем его представить так:

$$\overrightarrow{KM_1} = d\mathbf{n}^0.$$

Числовой множитель d, взятый по абсолютной величине, очевидно, даёт нам искомое расстояние; знак же d будет положительным, если векторы $\overrightarrow{KM_1}$ и $\mathbf{n}^0$ имеют одинаковое направление (т. е.

если точки M_1 и O лежат по разные стороны плоскости, как на черт. 121), и отрицательным, если эти векторы имеют противоположные направления (т. е. если точки M_1 и O лежат по одну сторону плоскости). Таким образом, d является отклонением M_1 от плоскости.

Заметив это, из черт. 121 усматриваем:

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1K},$$

или

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_1 - d\mathbf{n}^0.$$

Так как, с другой стороны, точка K лежит на плоскости

$$\mathbf{r}\mathbf{n}^0 - p = 0,$$

то радиус-вектор $\mathbf{r}_K$ этой точки должен удовлетворять уравнению плоскости, т. е. имеем:

$$(\mathbf{r}_1 - d\mathbf{n}^0)\,\mathbf{n}^0 - p = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{r}_1\mathbf{n}^0 - d - p = 0,$$

откуда

$$d = \mathbf{r}_1\mathbf{n}^0 - p. \tag{26}$$

Рассматривая выражение, полученное для d, замечаем, что оно есть результат подстановки $\mathbf{r}_1$ вместо $\mathbf{r}$ в левую часть нормального уравнения плоскости.

Выражая скалярное произведение $\mathbf{r}_1\mathbf{n}^0$ через проекции сомножителей, получим в координатах

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p, \tag{26'}$$

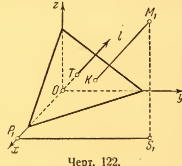
т. е. *чтобы найти отклонение точки от плоскости, нужно в левую часть нормального уравнения плоскости подставить вместо текущих координат координаты данной точки.*

Для вычисления расстояния от точки до плоскости следует взять абсолютную величину полученного отклонения.

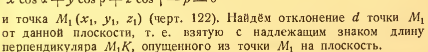
Замечание. Задача о расстоянии от точки до плоскости может быть решена и без применения векторного метода.

Пусть даны уравнение плоскости в нормальном виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$



Черт. 122.


и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (черт. 122). Найдём отклонение d точки M_1 от данной плоскости, т. е. взятую с надлежащим знаком длину перпендикуляра M_1K, опущенного из точки M_1 на плоскость.

Проведём через начало координат прямую l перпендикулярно к плоскости и установим на этой прямой положительное направление

от начала координат в сторону данной плоскости. Рассмотрим ломаную $\overline{OP_1S_1M_1K}$ и найдём её проекцию на ось l. Так как проекция ломаной равна проекции замыкающего отрезка (гл. I, § 3), то

$$\text{пр}\,\overline{OP_1S_1M_1K} = \text{пр}\,\overline{OK} = p. \qquad (27)$$

С другой стороны, проекция ломаной равна сумме проекций её звеньев (гл. I, § 3), т. е.

$$\text{пр}\,\overline{OP_1S_1M_1K} = \text{пр}\,\overline{OP_1} + \text{пр}\,\overline{P_1S_1} + \text{пр}\,\overline{S_1M_1} + \text{пр}\,\overline{M_1K}.$$

Следовательно, равенство (27) запишется так:

$$\text{пр}\,\overline{OP_1} + \text{пр}\,\overline{P_1S_1} + \text{пр}\,\overline{S_1M_1} + \text{пр}\,\overline{M_1K} = p. \qquad (27')$$

Так как (гл. I, § 3) имеем:

$$\text{пр}\,\overline{OP_1} = x_1 \cos\alpha,\quad \text{пр}\,\overline{P_1S_1} = y_1 \cos\beta,$$

$$\text{пр}\,\overline{S_1M_1} = z_1 \cos\gamma,\quad \text{пр}\,\overline{M_1K} = -d,$$

то равенство (27') запишется таким образом:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - d = p,$$

откуда

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p. \qquad (26')$$

Пример. Найти расстояние от точки (1, 2, 3) до плоскости

$$2x - 2y + z - 3 = 0.$$

Напишем нормальное уравнение данной плоскости, умножив данное уравнение на нормирующий множитель:

$$M = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3};$$

получим:

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0.$$

Отклонение точки от плоскости будет: $d = \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3 - 1 = -\frac{2}{3}$. Знак минус означает, что данная точка и начало координат лежат по одну сторону данной плоскости. Искомое расстояние равно

$$|d| = \frac{2}{3}.$$

Упражнения.

1. Проверить, проходит ли плоскость

$$3x - 5y + 2z - 17 = 0$$

через одну из следующих точек: а) (4, 1, 2); б) (2, −1, 3); в) (7, 1, 2); г) (3, 0, 4); д) (0, −4, 2).

2. Найти длину и направление перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость:

а) $2x + 3y + 6z - 35 = 0$; б) $21x + 30y - 70z - 84 = 0$; в) $x - 2y + 2z + 21 = 0$.

3. Найти на плоскости $4x - 7y + 5z - 20 = 0$ такую точку P, чтобы прямая OP составляла с осями координат равные углы

4. Найти на плоскости $y + z - 2 = 0$ такую точку P, чтобы прямая OP составляла с осями Oy и Oz углы в 60°.

5. Найти уравнение плоскости, если известно, что точка $(2, 9, -6)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

6*. Даны две точки: A $(2, -1, -2)$ и B $(8, -7, 5)$. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной к отрезку AB.

7. Даны две точки: A $(-7, 2, -1)$ и B $(3, 4, 10)$. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной к отрезку AB.

8. Определить величины отрезков, отсекаемых плоскостью $2x - y + 8z - 4 = 0$ на осях координат.

9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(5, -7, 4)$ и отсекающей на осях координат отрезки равной величины.

10. Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

а) $2x - 3y + 2 = 0$; б) $3x - 2 = 0$; в) $4y - 7z = 0$.

11. Найти уравнение плоскости:

а) параллельной оси Oy и проходящей через точки $(1, -5, 1)$ и $(3, 2, -2)$;

б) проходящей через ось Ox и через точку $(4, -3, -1)$;

в) параллельной плоскости xOz и проходящей через точку $(3, 2, -7)$.

12. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: а) $(7, 6, 7)$, $(5, 10, 5)$, $(-1, 8, 9)$; б) $(2, 4, 8)$, $(-3, 1, 5)$, $(6, -2, 7)$.

13. Найти угол между плоскостями:

а) $x + y - 11 = 0$, $3x + 8 = 0$; б) $y - \sqrt{3}x - 7 = 0$, $y = 0$;
в) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$, $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

14. Дана плоскость

$$3x - 7y + 5z - 12 = 0.$$

Найти уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через точку а) $(0, 0, 0)$; б) $(4, -7, 1)$; в) $(8, 0, 3)$; г) $(3, 0, 0)$.

15. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $(5, -4, 3)$ и $(-2, 1, 8)$ и перпендикулярной к плоскости: а) xOy; б) yOz; в) xOz.

16. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $(8, -3, 1)$, $(4, 7, 2)$ и перпендикулярной к плоскости $3x + 5y - 7z - 21 = 0$.

17. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к плоскостям

$$x - y + z - 7 = 0, \; 3x + 2y - 12z + 5 = 0.$$

18. Найти точку пересечения плоскостей:

а) $\begin{cases} 3x + 4y - 3z + 37 = 0, \\ 6x - 7y + 2z - 95 = 0, \\ 5x + 2y - 8z + 53 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 3y - 11z + 72 = 0, \\ 4x - 5y + 7z + 26 = 0, \\ 6x + 11y - 3z + 66 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x - 5y - 31 = 0, \\ 4x + 11z + 43 = 0, \\ 2x + 3y + 4z + 20 = 0. \end{cases}$

19. Определить расстояние от точки $(1, 2, 1)$ до плоскости

$$x + 2y + 2z - 10 = 0.$$

20. Найти на оси Oy точку, равноудалённую от плоскостей

$$2x + 3y + 6z - 6 = 0, \; 8x + 9y - 72z + 73 = 0.$$

21. Найти уравнения плоскостей, проходящих через ось Ox и отстоящих на расстоянии 8 единиц длины от точки (5, 4, 13).

22. Найти уравнения плоскостей, параллельных плоскости

$$20x - 4y - 5z + 7 = 0$$

и отстоящих от неё на расстоянии 6 единиц длины.

23. Найти расстояние между параллельными плоскостями

а) $3x + 2y - 6z - 35 = 0, \quad 3x + 2y - 6z - 56 = 0,$

б) $3x - 4y + 12z + 26 = 0, \quad 3x - 4y + 12z - 39 = 0.$

24*. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями

$$3x + 2y + 6z - 35 = 0, \quad 21x - 30y - 70z - 237 = 0.$$

25. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями

$$x - 2y + 2z + 21 = 0, \; 7x + 24z - 50 = 0.$$

26. Даны две точки A (a, b, c) и B (a_1, b_1, c_1). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной к отрезку AB.

27. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

28. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку (x_1, y_1, z_1).

29. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости xOz и проходящей через точку (x_1, y_1, z_1).

30. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: (1, 1, 1), (2, 2, 2) и (3, 3, 3).

31. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и перпендикулярной к плоскости xOy.

32. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к плоскостям

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

33. Найти точку пересечения плоскостей

$$x + y + z = 0, \quad 2x - 3y + 4z = 0, \quad 4x - 11y + 10z = 0.$$

34. Найти точку пересечения плоскостей

$$x + y + z - 2 = 0; \quad 2x - 3y + 4z - 3 = 0; \quad 4x - 11y + 10z - 5 = 0.$$

35. Найти точку пересечения плоскостей

$$x - y + z - 1 = 0, \quad x + y - z - 2 = 0, \quad 5x + y - z - 7 = 0.$$

36. Составить векторное уравнение плоскости по точке M_1 $(\mathbf{r}_1)$ и двум векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, которым плоскость параллельна. Перейти к декартовым координатам.

37. Составить векторное уравнение плоскости по двум точкам $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$ и параллельному вектору $\mathbf{a}$. Перейти к декартовым координатам.

ГЛАВА V
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 1. Уравнения прямой линии. Положение прямой линии в пространстве будет вполне определено, если зададим на прямой определённую точку M_0 при помощи её радиуса-вектора $\mathbf{r}_0$ и вектор $\mathbf{s}$ (отличный от нулевого), которому прямая параллельна (черт. 123). Этот вектор $\mathbf{s}$ назовём направляющим вектором прямой. Переменной точке M прямой линии соответствует её радиус-вектор $\overrightarrow{OM}=\mathbf{r}$, и из черт. 123 мы получаем:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M}. \qquad (1)$$

Черт. 123.

Заметив, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ параллелен вектору $\mathbf{s}$, мы его выразим таким образом:

$$\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{s}t,$$

где числовой множитель t может принимать любые значения в зависимости от положения точки M на прямой. Следовательно, равенство (1) можно переписать так:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{s}t, \qquad (2)$$

причём t играет роль переменного параметра. Уравнение (2) назовём *векторным уравнением прямой линии.*

Желая заменить уравнение (2) равносильными ему координатными уравнениями, обозначим декартовы координаты точки M_0 относительно системы с началом координат в точке O через a, b, c (это будут проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}_0$), текущие координаты точки M — через x, y, z (проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$) и, наконец, проекции вектора $\mathbf{s}$ — через m, n, p. Тогда, написав уравнение (2) в проекциях, получим:

$$x=a+mt, \quad y=b+nt, \quad z=c+pt. \qquad (3)$$

Когда параметр t изменяется, точка с координатами x, y, z, определяемыми из уравнений (3), движется по данной прямой. Уравнения (3) называют *параметрическими уравнениями прямой линии.*

Так как m, n, p — проекции направляющего вектора $\mathbf{s}$, которому прямая параллельна, то числа m, n, p характеризуют направление прямой линии в пространстве и их принято называть *направляющими коэффициентами* этой прямой. Заметим, что при единичном векторе $\mathbf{s} = \mathbf{s}^0$ коэффициенты m, n, p становятся косинусами углов α, β, γ, образованных данной прямой (направлением вектора $\mathbf{s}^0$) с осями координат Ox, Oy, Oz. В этом случае уравнения (2) и (3) примут вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}^0 t, \tag{2'}$$

$$x = a + \cos\alpha \cdot t, \quad y = b + \cos\beta \cdot t, \quad z = c + \cos\gamma \cdot t, \tag{3'}$$

причём в этом случае параметр t имеет простое геометрическое значение: t обозначает расстояние переменной точки M от точки $M_0(a, b, c)$, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли направление вектора $\overrightarrow{M_0M}$ одинаково или противоположно направлению вектора $\mathbf{s}^0$ ($\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{s}^0 t$). Другими словами, в уравнениях (2') и (3') t есть величина направленного отрезка $\overline{M_0M}$ рассматриваемой прямой, считая, что положительное направление прямой совпадает с направлением вектора $\mathbf{s}^0$.

Посмотрим, возможно ли определить $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, зная m, n, p. Очевидно, имеем:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^0 s,$$

где s обозначает длину вектора $\mathbf{s}$. Переписав последнее равенство в проекциях, получим:

$$m = \cos\alpha \cdot s, \quad n = \cos\beta \cdot s, \quad p = \cos\gamma \cdot s, \tag{4}$$

т. е. m, n, p пропорциональны направляющим косинусам прямой линии, причём множителем пропорциональности служит длина $s = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ вектора $\mathbf{s}\{m, n, p\}$.

Таким образом, из равенств (4) находим:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{m}{s} = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{n}{s} = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{p}{s} = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Следовательно, направление прямой в пространстве определяется отношениями $m:n:p$ её направляющих коэффициентов, что даёт возможность считать длину вектора $\mathbf{s}\{m, n, p\}$ произвольной.

Вместо параметрических уравнений (3) и (3') обычно определяют прямую линию посредством системы двух уравнений первой степени между текущими координатами. Эти уравнения получаются из урав-

нений (3) или (3') путём исключения параметра t. Так, из уравнений (3) находим:

$$\frac{x-a}{m}=t, \quad \frac{y-b}{n}=t, \quad \frac{z-c}{p}=t,$$

или

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \tag{5}$$

Уравнения (5) назовём *каноническими уравнениями прямой линии.*

В частности, при $m=\cos\alpha$, $n=\cos\beta$, $p=\cos\gamma$ уравнения (5) примут вид:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}.$$

Система двух уравнений (5) представляет нашу прямую линию как пересечение двух плоскостей, определяемых уравнениями

$$\frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{p}, \quad \frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Заметим, что в канонических уравнениях все коэффициенты m, n, p одновременно не могут обратиться в нуль, так как $s\neq 0$. Но некоторые из них могут быть равны нулю. В этом случае запись (5) понимают условно, в том смысле, как это разъяснялось в § 13 гл. II.

Пусть, например, $m=0$, а $n\neq 0$. Тогда в соответствии со сказанным в § 13 гл. II

$$n(x-a)=0\cdot(y-b),$$

т. е.

$$x-a=0.$$

Тот же результат мы, конечно, получим и из уравнений (3). Заметим, что равенства

$$m=0$$

и

$$x-a=0$$

означают геометрически одно и то же: первое из них показывает, что прямая перпендикулярна к оси Ox, а второе, что прямая лежит в плоскости, перпендикулярной к оси Ox.

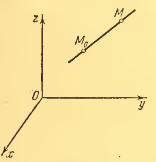
Замечание. Можно вывести уравнения прямой линии, не прибегая к векторам. Возьмём на прямой линии определённую точку $M_0(a, b, c)$ и переменную точку $M(x, y, z)$. Обозначим через α, β, γ углы данной прямой (определённым образом выбранного направления этой прямой) с осями координат Ox, Oy, Oz, а через ρ — расстояние M_0M, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли направление отрезка $\overline{M_0M}$ одинаково или противоположно выбранному направлению на прямой.

Проекции отрезка $\overline{M_0M}$ на оси координат Ox, Oy и Oz (черт. 124) суть соответственно: $x-a$, $y-b$, $z-c$. По формуле, выражающей проекцию отрезка (гл. I, § 3), имеем:

$$x-a=\rho\cos\alpha,\quad y-b=\rho\cos\beta,\quad z-c=\rho\cos\gamma.$$

Исключая ρ из трёх последних уравнений, запишем уравнения прямой линии в виде

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}. \qquad (5')$$



Черт. 124.

Умножая знаменатели отношений (5′) на одно и то же произвольное число, представим уравнения прямой линии в виде

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \qquad (5)$$

где m, n и p суть количества, пропорциональные косинусам углов прямой линии с осями координат, т. е.

$$m:n:p=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma.$$

Эти уравнения (5) называют *каноническими уравнениями прямой линии.*

Посмотрим, как определить $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, зная m, n, p. По сказанному имеем: $m=\lambda\cos\alpha$, $n=\lambda\cos\beta$, $p=\lambda\cos\gamma$, где λ есть множитель пропорциональности. Возводя последние равенства в квадрат и складывая, получим:

$$m^2+n^2+p^2=\lambda^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma).$$

Так как $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (гл. I, § 4), то

$$m^2+n^2+p^2=\lambda^2$$

и

$$\lambda=\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2},$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

В формулах (4′) можно брать знак $+$ или $-$ соответственно двум направлениям прямой.

Числа m, n, p называются *направляющими коэффициентами прямой линии* и их отношения $m:n:p$ определяют её направление в пространстве,

§ 2. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Общие уравнения прямой. Пусть в канонических уравнениях прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{5}$$

коэффициент p отличен от нуля, т. е. прямая не параллельна плоскости xOy. Запишем эти уравнения раздельно в таком виде:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{p}, \quad \frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \tag{6}$$

При нашем условии уравнения (6) вполне определяют прямую. Каждое из них в отдельности выражает плоскость, причём первая из них параллельна оси Oy, а вторая — оси Ox.

Таким образом, представляя прямую линию уравнениями вида (6), мы рассматриваем её как пересечение двух плоскостей, проектирующих эту прямую на плоскости координат xOz и yOz. Первое из уравнений (6), рассматриваемое в плоскости xOz, определяет проекцию данной прямой линии на эту плоскость; точно так же второе из уравнений (6), рассматриваемое в плоскости yOz, определяет проекцию данной прямой линии на плоскости yOz. Итак, можно сказать, что дать уравнения прямой линии в виде (6) — это значит дать её проекции на плоскости координат xOz и yOz.

Если бы направляющий коэффициент p был равен нулю, то обязательно хотя бы один из двух других коэффициентов, например m, был бы отличен от нуля, т. е. прямая не была бы параллельна плоскости yOz. В этом случае мы могли бы выразить её уравнениями плоскостей, проектирующих её на координатные плоскости xOy и xOz, записав уравнения (5) в виде

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}, \quad \frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{p}.$$

Таким образом, любая прямая может быть выражена уравнениями двух плоскостей, проходящих через неё и проектирующих её на координатные плоскости. Но определять прямую совсем не обязательно именно такой парой плоскостей.

Через каждую прямую проходит бесчисленное множество плоскостей. Любые две из них, пересекаясь, определяют её в пространстве. Следовательно, уравнения любых двух таких плоскостей, рассматриваемые совместно, представляют собой уравнения этой прямой.

Вообще всякие две не параллельные между собой плоскости с общими уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

определяют прямую их пересечения.

Уравнения (7), рассматриваемые совместно, называются **общими уравнениями прямой.**

От общих уравнений прямой (7) можно перейти к её каноническим уравнениям. Для этой цели мы должны знать какую-нибудь точку прямой и направляющий вектор.

Координаты точки легко найдём из данной системы уравнений, выбирая одну из координат произвольно и решая после этого систему двух уравнений относительно оставшихся двух координат.

Для отыскания направляющего вектора прямой заметим, что этот вектор, направленный по линии пересечения данных плоскостей, должен быть перпендикулярным к обоим нормальным векторам $\mathbf{n}_1\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{n}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ этих плоскостей. Обратно, всякий вектор, перпендикулярный к $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, параллелен обеим плоскостям, а следовательно, и данной прямой.

Но векторное произведение $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ также обладает этим свойством. Поэтому за направляющий вектор прямой можно принять векторное произведение нормальных векторов данных плоскостей.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$2x-3y+z-5=0, \quad 3x+y-2z-4=0.$$

Выберем произвольно одну из координат. Пусть, например, $z=1$. Тогда

$$2x-3y=4, \quad 3x+y=6,$$

откуда $x=2$, $y=0$. Итак, мы нашли точку (2, 0, 1), лежащую на прямой.

Находя теперь векторное произведение векторов $\{2, -3, 1\}$ и $\{3, 1, -2\}$, получаем направляющий вектор прямой $\{5, 7, 11\}$. Поэтому канонические уравнения будут:

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z-1}{11}.$$

Замечание. От общих уравнений прямой вида (7) можно перейти к каноническим, и не прибегая к векторному методу.

Предварительно остановимся несколько подробнее на уравнениях (6):

$$\frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{p}, \quad \frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \tag{6}$$

Выразим из них x и y через z. Тогда получим:

$$x=Mz+x_0, \quad y=Nz+y_0, \tag{6'}$$

где положено

$$M=\frac{m}{p}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},$$

$$N=\frac{n}{p}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

$$x_0=a-\frac{mc}{p}, \quad y_0=b-\frac{nc}{p}.$$

Уравнения (6′) называются уравнениями прямой в проекциях на плоскости xOz и yOz.

Установим геометрический смысл постоянных M и N: M представляет собой угловой коэффициент проекции данной прямой на плоскость координат xOz (тангенс угла этой проекции с осью Oz), а N есть угловой коэффициент проекции данной прямой на плоскость координат yOz (тангенс угла этой проекции с осью Oz). Таким образом, числа M и N определяют направления проекций данной прямой линии на две плоскости координат, а значит, они характеризуют и направление самой данной прямой. Поэтому числа M и N называют угловыми коэффициентами данной прямой.

Чтобы выяснить геометрический смысл постоянных x_0 и y_0, положим в уравнениях (6) прямой линии $z=0$; тогда получим: $x=x_0$, $y=y_0$, т. е. точка $(x_0, y_0, 0)$ лежит на данной прямой. Очевидно, эта точка есть точка пересечения данной прямой с плоскостью xOy. Итак, x_0 и y_0 суть координаты следа данной прямой линии на плоскости координат xOy.

Теперь легко сделать переход от уравнений в проекциях к каноническим. Пусть, например, даны уравнения (6). Решая эти уравнения относительно z, найдём:

$$z=\frac{x-x_0}{M}, \quad z=\frac{y-y_0}{N},$$

откуда непосредственно получаем канонические уравнения в виде

$$\frac{x-x_0}{M}=\frac{y-y_0}{N}=\frac{z}{1}.$$

Пример 2. Привести канонические уравнения прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$$

к уравнениям в проекциях на плоскости xOz и yOz.

Данные уравнения переписываем в виде

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z}{-1}, \quad \frac{y}{3}=\frac{z}{-1}.$$

Решая первое из этих уравнений относительно x, а второе относительно y, найдём искомые уравнения в проекциях:

$$x=-2z+1, \quad y=-3z.$$

Пример 3. Привести уравнения в проекциях

$$x=3z-2, \quad y=2z+1$$

к каноническому виду.

Решая данные уравнения относительно z, получим:

$$z=\frac{x+2}{3}, \quad z=\frac{y-1}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}.$$

Пример 4. Привести уравнения в проекциях

$$y=-2, \quad z=3x-1$$

к каноническому виду.

Переписав систему уравнений в виде

$$y=0\cdot x-2, \quad z=3x-1,$$

найдём:

$$\frac{x}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{3}.$$

Уравнения в проекциях можно получить и из общих уравнений прямой (7), решая общие уравнения относительно каких-нибудь двух координат, например x и y; если прямая параллельна плоскости xOy, то привести уравнения (7) к уравнениям (6) не удастся, но тогда можно привести уравнения (7) к уравнениям в проекциях на другую пару координатных плоскостей.

Если требуется общие уравнения прямой привести к каноническим, то можно предварительно перейти к уравнениям в проекциях.

Пример 5. Привести уравнения прямой

$$2x+y-z+1=0, \quad 3x-y+2z-3=0$$

к каноническому виду.

Решая данные уравнения относительно x и y, найдём уравнения в проекциях

$$x=-\frac{1}{5}z+\frac{2}{5}, \quad y=\frac{7}{5}z-\frac{9}{5}.$$

Выражаем из этих уравнений z:

$$z=\frac{x-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}, \qquad z=\frac{y+\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}},$$

и получаем канонические уравнения

$$\frac{x-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}=\frac{y+\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}}=\frac{z}{1}.$$

Умножив каждый из направляющих коэффициентов на -5, получим более простой вид канонических уравнений:

$$\frac{x-\frac{2}{5}}{1}=\frac{y+\frac{9}{5}}{-7}=\frac{z}{-5}.$$

§ 3. Угол между двумя прямыми линиями. Углом между прямыми в пространстве будем называть любой из углов, образованных двумя прямыми, проведёнными через произвольную точку параллельно данным. При этом мы условимся брать угол в границах

от 0 до π, если не сделано дополнительных указаний. Пусть уравнения двух прямых линий суть:

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}, \quad \frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}.$$

Очевидно, за угол φ между ними можно принять угол между их направляющими векторами $\{m_1, n_1, p_1\}$ и $\{m_2, n_2, p_2\}$ или угол, дополняющий его до π. Поэтому по формуле (17') § 10 гл. II имеем:

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (8)$$

В формуле (8) можно ставить любой знак, что соответствует выбору одного из двух различных углов между данными прямыми.

Замечание. Формулу (8) можно вывести, не прибегая к векторному методу.

Направляющие косинусы данных прямых будут:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\alpha_1=\pm\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}, \quad \cos\beta_1=\pm\frac{n_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}},\\
&\cos\gamma_1=\pm\frac{p_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}};\\
&\cos\alpha_2=\pm\frac{m_2}{\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}, \quad \cos\beta_2=\pm\frac{n_2}{\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}},\\
&\cos\gamma_2=\pm\frac{p_2}{\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4'')$$

Обозначая через φ искомый угол, найдём (гл. I, § 4):

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$

или

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\ \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (8)$$

В формуле (8) можно ставить любой знак, что соответствует выбору одного из двух различных углов между данными прямыми.

Пример. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}.$$

Для первой прямой направляющие коэффициенты будут: $m_1=1$, $n_1=-4$, $p_1=1$, а для второй: $m_2=2$, $n_2=-2$, $p_2=-1$. Следовательно:

$$\cos\varphi=\pm\frac{1\cdot2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\varphi=\frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad \varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

§ 4. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. В случае перпендикулярности прямых $\cos\varphi = 0$, и из формулы (8) получаем искомое условие

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \text{ (условие перпендикулярности).} \qquad (9)$$

Замечание. Это условие получится сразу, если заметим, что скалярное произведение векторов $\{m_1, n_1, p_1\}$ и $\{m_2, n_2, p_2\}$ должно быть равно нулю.

Так как направление прямой определяется отношениями $m:n:p$, то условие параллельности двух прямых будет:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ (условие параллельности).} \qquad (10)$$

Замечание. Это условие можно получить, заметив, что векторы $\{m_1, n_1, p_1\}$ и $\{m_2, n_2, p_2\}$ коллинеарны.

Задача. *Составить уравнения прямой линии, проходящей через данную точку (a, b, c) параллельно прямой*

$$\frac{x-a_1}{m} = \frac{y-b_1}{n} = \frac{z-c_1}{p}.$$

Пусть уравнения искомой прямой будут:

$$\frac{x-a}{M} = \frac{y-b}{N} = \frac{z-c}{P}. \qquad (5)$$

Так как эта прямая параллельна данной прямой, то должно выполняться условие их параллельности:

$$\frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{P}{p},$$

откуда можно взять $M = m$, $N = n$, $P = p$. Следовательно, уравнения искомой прямой суть:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}.$$

§ 5. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Пусть нужно найти уравнения прямой, проходящей через точки $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$. Будем искать эти уравнения в канонической форме.

Для решения задачи достаточно знать координаты одной из точек, лежащих на этой прямой, и направляющий вектор. За такую точку можно принять любую из двух данных. Возьмём, например, $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$. За направляющий же вектор прямой примем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Проекциями его на координатные оси будут:

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1 \quad \text{и} \quad z_2 - z_1.$$

Уравнения искомой прямой примут вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (11)$$

Замечание. Можно вывести (11) и без применения векторного метода. Уравнения прямой, проходящей через $M_1(x_1, y_1, z_1)$, будут

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Так как точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежит на прямой, то

$$\frac{x_2-x_1}{m}=\frac{y_2-y_1}{n}=\frac{z_2-z_1}{p}.$$

Сопоставляя эти равенства, получим (11).

Пример. Составить уравнения прямой линии, проходящей через начало координат и точку (1, 1, 1).

Здесь $x_1=y_1=z_1=0$; $x_2=y_2=z_2=1$. Следовательно, пользуясь уравнениями (11), получим искомые уравнения

$$x=y=z.$$

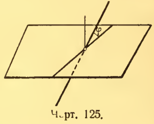
§ 6. Угол между прямой и плоскостью. Пусть уравнения прямой линии суть:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},$$

а уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Углом φ между прямой и плоскостью будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и её проекцией на плоскость. Найдём синус угла φ; при этом в дальнейшем можно считать, что $\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, потому что синусы смежных углов равны. Угол $\frac{\pi}{2}-\varphi$ будет, как видно из черт. 125, углом между прямой и перпендикуляром к плоскости. Его косинус легко найдём по направляющим коэффициентам A, B, C перпендикуляра к плоскости и направляющим коэффициентам m, n, p данной прямой; заметив, что $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$, получим окончательно:



Черт. 125.

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{12}$$

Числитель здесь взят по абсолютной величине, так как $\sin\varphi \geqslant 0$.

§ 7. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. В случае параллельности прямой линии

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

угол между ними равен нулю, следовательно, $\sin\varphi = 0$ и формула (12) даёт искомое условие

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ (условие параллельности)}. \quad (13)$$

Замечание. Это условие получится сразу, если заметим, что векторы $\{A, B, C\}$ и $\{m, n, p\}$ перпендикулярны, и, значит, их скалярное произведение равно нулю.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости совпадает с условием параллельности этой прямой и перпендикуляра к плоскости, т. е. будет:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \text{ (условие перпендикулярности)}. \quad (14)$$

Задача. *Составить уравнение геометрического места всех прямых, проходящих через точку* (a, b, c) *параллельно плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнение любой прямой, проходящей через точку (a, b, c), будет:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{s}t,$$

где $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор данной точки, а $\mathbf{s}$ есть тот вектор, которому прямая параллельна. Так как искомая прямая должна быть перпендикулярна к вектору $\mathbf{n}$ $\{A, B, C\}$, то должно иметь место

$$\mathbf{n}\mathbf{s} = 0.$$

Умножая уравнение прямой на вектор $\mathbf{n}$, получим:

$$\mathbf{r}\mathbf{n} = \mathbf{r}_1\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{s}t, \text{ или } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{n} = 0,$$

так как $\mathbf{n}\mathbf{s} = 0$. Уравнение $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{n} = 0$ определяет плоскость, проходящую через точку с радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{n}$. Переводя его в координатную форму, будем иметь:

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0.$$

Замечание. Эту же задачу можно решить, не прибегая к векторному методу. Уравнения любой прямой, проходящей через точку (a, b, c), суть:

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c}{p}.$$

Условие параллельности искомых прямых и данной плоскости выразится равенством

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Заменяя в последнем условии m, n и p величинами $x - a$, $y - b$ и $z - c$, им пропорциональными, получаем:

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0.$$

§ 8. Уравнение пучка плоскостей. Пусть уравнения данной прямой суть:

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Составим уравнение первой степени:

$$Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0, \qquad (15)$$

которое при любом значении постоянного λ определяет плоскость. Если точка лежит на данной прямой линии, то её координаты одновременно удовлетворяют обоим уравнениям этой прямой и, следовательно, уравнению (15) при любом значении λ. Таким образом, уравнение (15) определяет плоскости, проходящие через данную прямую. Обратно, всякая такая плоскость определяется одной точкой $M(x_1, y_1, z_1)$, лежащей вне данной прямой линии; значение постоянного λ, соответствующее этой плоскости, найдётся из условия

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D+\lambda(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)=0,$$

если только $A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D\neq 0$. Таким образом, уравнение (15) при соответствующем выборе λ определяет любую плоскость, проходящую через данную прямую, за исключением лишь одной из данных плоскостей, именно плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

Называя пучком плоскостей совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую, мы можем сказать, что уравнение (15) является *уравнением пучка плоскостей*, так как оно определяет все плоскости пучка (кроме второй из данных плоскостей).

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$x+y-z=0,\ x-y+z-1=0$$

и точку $(1, 1, -1)$.

Уравнение любой плоскости, проходящей через данную прямую, имеет вид:

$$x+y-z+\lambda(x-y+z-1)=0.$$

Условие прохождения этой плоскости через точку $(1, 1, -1)$ даёт:

$$3+\lambda(-2)=0, \text{ откуда } \lambda=\frac{3}{2}.$$

Подставляя это значение λ в уравнение пучка плоскостей, получим:

$$x+y-z+\frac{3}{2}(x-y+z-1)=0,$$

или

$$5x-y+z-3=0.$$

§ 9. Пересечение прямой с плоскостью. Пусть даны уравнения прямой линии:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{16}$$

и уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{17}$$

Координаты точки пересечения прямой линии (16) с плоскостью (17) должны одновременно удовлетворять уравнениям (16) и (17), а потому для их определения нужно совместно решить эти уравнения, считая x, y, z за неизвестные.

Приравнивая каждое из равных отношений уравнений (16) вспомогательному неизвестному t, получаем четыре уравнения первой степени с четырьмя неизвестными x, y, z и t:

$$\frac{x-a}{m}=t,\quad \frac{y-b}{n}=t,\quad \frac{z-c}{p}=t,\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Из первых трёх уравнений находим соответственно:

$$x=a+mt,\ y=b+nt,\ z=c+pt. \tag{18}$$

Подставляя эти значения x, y и z в четвёртое уравнение, получаем:

$$A(a+mt)+B(b+nt)+C(c+pt)+D=0$$

или

$$Aa+Bb+Cc+D+t(Am+Bn+Cp)=0,$$

откуда находим:

$$t=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}. \tag{19}$$

Внося найденное значение t в формулы (18), получим координаты искомой точки пересечения прямой линии (16) плоскостью (17). Если

$$Am+Bn+Cp\neq 0,$$

то t, вычисленное по формуле (19), имеет определённое конечное значение; следовательно, в этом случае прямая пересекает плоскость в одной точке. В случае

$$Am+Bn+Cp=0,\ Aa+Bb+Cc+D\neq 0$$

прямая параллельна плоскости (в силу первого равенства), а точка (a, b, c), через которую прямая проходит, лежит вне плоскости, следовательно, прямая не имеет ни одной общей точки с плоскостью. Наконец, если

$$Am+Bn+Cp=0,\ Aa+Bb+Cc+D=0,$$

то прямая параллельна данной плоскости (в силу первого равенства) и проходит через точку (a, b, c), лежащую в этой плоскости (в силу второго равенства): следовательно, прямая вся лежит в плоскости.

§ 10. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости. Две прямые в пространстве, вообще говоря, не лежат в одной плоскости. Посмотрим, при каком условии две прямые

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1},$$
$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}$$

лежат в одной плоскости.

Обозначим направляющий вектор первой из них через $\mathbf{s}_1$, а второй — через $\mathbf{s}_2$.

Как видно из данных уравнений, первая прямая проходит через точку (a_1, b_1, c_1), радиус-вектор которой мы обозначим через $\mathbf{r}_1$. Вторая же прямая проходит через точку (a_2, b_2, c_2). Радиус-вектор этой точки обозначим через $\mathbf{r}_2$. Проведём вектор из точки (a_1, b_1, c_1) в точку (a_2, b_2, c_2). Он выразится так: $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, а проекциями его будут a_2-a_1, b_2-b_1 и c_2-c_1.

Из геометрических соображений ясно, что данные прямые лежат в одной плоскости в том и только в том случае, если эти три вектора $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ и $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ компланарны. Следовательно, искомое условие заключается в равенстве нулю смешанного произведения этих трёх векторов (гл. II, § 14), т. е.

$$((\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)=0.$$

Переписав это условие в проекциях, получим:

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

Замечание. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости, можно вывести, не прибегая к векторному методу. Пусть уравнение плоскости, в которой лежат обе данные прямые, будет:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{20}$$

Условия, при которых первая прямая находится в плоскости (20), согласно предыдущему (§ 9) имеют вид:

$$Am_1+Bn_1+Cp_1=0, \quad Aa_1+Bb_1+Cc_1+D=0. \tag{21}$$

Аналогично условия прохождения плоскости (20) через вторую данную прямую суть:

$$Am_2+Bn_2+Cp_2=0, \quad Aa_2+Bb_2+Cc_2+D=0. \tag{21'}$$

Вычитая друг из друга вторые равенства (21) и (21′), исключим D. В результате будем иметь систему трёх линейных однородных уравнений относительно A, B и C

$$\left.\begin{aligned} A(a_2-a_1)+B(b_2-b_1)+C(c_2-c_1)&=0,\\ Am_1+Bn_1+Cp_1&=0,\\ Am_2+Bn_2+Cp_2&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Если эта система уравнений допускает решения, отличные от нуля, то плоскость (20) существует и, следовательно, данные прямые лежат в одной плоскости; в противном случае — нет.

Условие существования отличных от нуля решений системы (22) может быть записано в виде равенства нулю определителя (ч. I, гл. VI, § 6)

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (1, 1, 1) и пересекающей две данные прямые:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3},\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}.$$

Уравнения искомой прямой, проходящей через точку (1, 1, 1), суть:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p}.$$

Условие нахождения этой прямой с первой из данных прямых в одной плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ m & n & p \end{vmatrix}=0 \text{ или } m-2n+p=0.$$

Условие нахождения искомой прямой со второй из данных прямых в одной плоскости запишется в виде:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ m & n & p \end{vmatrix}=0 \text{ или } 2m+4n-2p=0,$$

что по сокращении на 2 даст:

$$m+2n-p=0.$$

Остаётся определить отношение $m:n:p$ из двух уравнений: $m-2n+p=0$ и $m+2n-p=0$. Разделив каждое из этих уравнений на p, находим неизвестные:

$$\frac{m}{p}=0,\ \frac{n}{p}=\frac{1}{2},\ \text{т. е. } m:n:p=0:1:2.$$

Подставляя в уравнения искомой прямой вместо m, n, p, соответственно 0, 1, 2, получим окончательные уравнения прямой, проходящей через точку

(1, 1, 1) и лежащей в одиой плоскости с первой прямой и в одной плоскости со второй прямой:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

Легко проверить, что эта прямая действительно пересекается с каждой из двух заданных прямых [1]).

Пример 2. Составить уравнеиия прямой, проходящей через точку (1, 1, 1), пересекающей прямую $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ и перпендикулярной к прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}.$$

Уравнеиия искомой прямой будут:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p},$$

где отиошение $m:n:p$ определяется из условий:

$$m-2n+p=0,\quad 2m+n+4p=0,$$

из которых первое есть условие нахождения искомой прямой в одной плоскости с первой из даиных прямых (см. пример 1), а второе выражает перпеидикуляриость искомой прямой со второй из данных прямых. Из этих условий находим:

$$m:n:p=9:2:(-5).$$

Уравиения искомой прямой будут:

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-5}.$$

Упражнения

Прямая [2])

1. Указать особенности в расположеиии следующих прямых:

а) $\begin{cases} Ax+By+Cz=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} Ax+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} By+Cz+D=0, \\ B_1y+C_1z+D_1=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} Ax+Cz=0, \\ A_1x+C_1z=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3y+2z=0, \\ 5x-1=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x+3y-7z-5=0, \\ 4x+3y-7z-5=0. \end{cases}$

[1]) Вообще говоря, при других числовых даииых могло бы случиться, что прямая, найдеииая указаиным образом, параллельиа одиой или даже обеим из заданных прямых. В этом случае мы заключили бы, что ие существует прямой, проходящей через даиную точку и пересекающейся с обеими прямыми.

[2]) Упражиеиия 1, 2*, 3* и 4* заимствованы из кииги *О. Н. Цубербиллер*, Задачи и упражнеиия по аналитической геометрии.

2*. При каком значении свободного члена D прямая

$$3x-y+2z-6=0,\quad x+4y-z+D=0$$

пересекает ось Oz?

3*. При каких значениях коэффициентов B и D прямая

$$x-2y+z-9=0,\quad 3x+By+z+D=0$$

лежит в плоскости xOy?

4*. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

для того чтобы прямая: а) проходила через начало координат; б) была параллельна оси Ox; в) пересекала ось Oy; г) совпадала с осью Oz?

5. Определить, лежат ли точки $A(5, -2, -3)$ и $B(8; 3, 1)$ на прямой

$$5x-3y-31=0,\quad 3x+4y+7z+14=0.$$

6. Проверить, что, исключив из двух уравнений предыдущей задачи: а) координату y, б) координату x, получим в обоих случаях уравнение плоскости, проходящей через точку A и не проходящей через точку B.

7*. Дана прямая

$$2x-3y+4z-12=0,\quad x+4y-2z-10=0.$$

Найти уравнения плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости.

8. Дана прямая

$$3x+2y-4z-5=0,\quad 6x-y-2z+4=0.$$

Найти уравнения проекций этой прямой на координатные плоскости.

9*. Найти проекцию прямой

$$x+y-z-1=0,\quad x-y+z+1=0$$

на плоскость $x+y+z=0$.

10. Найти проекцию прямой

$$2x+3y+4z+5=0,\quad x-6y+3z-7=0$$

на плоскость $2x+2y+z-15=0$.

11. Определить направляющие косинусы прямых:

$$\text{а) } \frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-12}=\frac{z-1}{3};\qquad \text{б) } \frac{x}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-8}{-2}.$$

12. Привести уравнения прямых

$$\text{а) } \begin{cases} x=3z-5, \\ y=2z-8; \end{cases}\qquad \text{б) } \begin{cases} x=2z-5, \\ y=6z+7; \end{cases}\qquad \text{в) } \begin{cases} y=4, \\ z=3x+12 \end{cases}$$

к каноническому виду.

13. Найти углы между прямыми:

$$L_1\ \begin{cases} y=2x-7, \\ z=2x+5; \end{cases}\qquad L_2\ \begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x+8, \\ z=3x; \end{cases}\qquad L_3\ \begin{cases} y=6, \\ z=\dfrac{15}{8}x+6. \end{cases}$$

14. Определить направляющие косинусы прямой

$$x+2y-z-2=0,\quad x+y-3z-7=0.$$

15. Найти направляющие косинусы прямой

$$x+y-z=0,\quad x-y+2=0.$$

16. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} 2x-2y-z+8=0, \\ x+2y-2z+1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+y+3z-21=0, \\ 2x+2y-3z+15=0. \end{cases}$$

17. Через точку $(2, -3, -8)$ провести прямую, параллельную: а) оси Oz; б) прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{5}$.

18. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $(3, -2, -1)$ и $(5, 4, 5)$.

19. Найти уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку (a, b, c).

20. Проверить, лежат ли прямые

а) $\begin{cases} x=7z-17, \\ y=3z-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4z-11, \\ y=-10z+25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x+y+3z=0, \\ 2x+3y+2z-9=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-2y+z+5=0, \\ x-3y-2z-3=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+3y+z-1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y+3z-4=0, \\ 3x+y-z-3=0 \end{cases}$

в одной плоскости.

21. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $(-3, 5, -9)$ и пересекающей прямые:

$$\begin{cases} y=3x+5, \\ z=2x-3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=4x-7, \\ z=5x+10. \end{cases}$$

22. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(1, 2, 3)$, пересекающей ось Oz и перпендикулярной к прямой $x=y=z$.

23. Найти уравнения прямой, пересекающейся с прямыми

$$\begin{cases} x=3z-1, \\ y=2z-3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2x-5, \\ z=7x+2 \end{cases}$$

и перпендикулярной к ним обеим.

24. Провести через точку $(7, 3, 5)$ прямую, направляющие косинусы которой суть $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$. Найти уравнения прямой, пересекающей первую прямую, проходящей через точку $(2, -3, -1)$ и образующей с осью Ox угол в 60^0.

25. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (a, b, c) и пересекающей прямые

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}, \qquad \frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}.$$

26. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (a, b, c), пересекающей ось Oz и перпендикулярной к прямой

$$\frac{x}{m_1}=\frac{y}{n_1}=\frac{z}{p_1}.$$

27. Найти уравнения прямой, пересекающейся с прямыми

$$\begin{cases} x=mz+a, \\ y=nz+b; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=m_1z+a_1, \\ y=n_1z+b_1 \end{cases}$$

и перпендикулярной к ним обеим.

Плоскость и прямая

28. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

и плоскости $2x+3y+3z-8=0$.

29. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\begin{cases} y=-2x+9, \\ z=9x-43 \end{cases}$$

и плоскости $3x-4y+7z-33=0$.

30. Найти угол между прямой

$$3x-2y=24, \quad 3x-z=-4$$

и плоскостью $6x+15y-10z+31=0$.

31. Найти уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (1, 2, 3) на плоскость:

а) $4x-5y-8z+21=0$; б) $3x+11y=0$; в) $z=8$.

32. Через точку $(3, -2, -1)$ провести плоскость, перпендикулярную к прямой

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

33. Найти кратчайшее расстояние от точки A (1, 2, 3) до прямой

$$x+y-z=1, \quad 2x+z=3.$$

34*. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми

$$x+y-z=1, \quad 2x+z=3 \quad \text{и} \quad x=y=z-1.$$

35. Каково должно быть значение коэффициента p, чтобы прямая

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z-2}{p}$$

была параллельна плоскости $3x-4y+7z-33=0$?

36. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1, -2, 3)$ и параллельной прямым

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-5}{6}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-8}.$$

37. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, -3, 1)$ и через прямую

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}.$$

38. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$x+y=0, \quad x-y+z-2=0$$

параллельно прямой $x=y=z$.

39. Провести через прямую

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

плоскость, параллельную прямой

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}.$$

40. Найти уравиеиие плоскости, проходящей через параллельиые прямые

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3}.$$

41. Через точку $(-1, 0, 4)$ провести прямую, параллельиую плоскости

$$3x-4y+z-10=0,$$

так, чтобы оиа пересекла прямую

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}.$$

42. Составить уравнение геометрического места всех прямых, проходящих через иачало координат перпендикулярно к прямой $x=y=z$.

43. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (a, b, c) и параллельной прямым с иаправляющими коэффициеитами (m_1, n_1, p_1), (m_2, n_2, p_2).

44. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (a, b, c) и через прямую

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}.$$

45. Составить уравиеиие плоскости, проходящей через прямую

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

параллельио прямой

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$

46. Провести через прямую

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

плоскость, параллельиую прямой

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}.$$

47. Найти уравнеиие плоскости, проходящей через параллельиые прямые

$$\frac{x-a_1}{m}=\frac{y-b_1}{n}=\frac{z-c_1}{p}, \quad \frac{x-a_2}{m}=\frac{y-b_2}{n}=\frac{z-c_2}{p}.$$

48. Через точку (a, b, c) провести прямую, параллельную плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

так, чтобы оиа пересекала прямую

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}.$$

49. Составить уравнение геометрического места всех прямых, проходящих через точку (a, b, c) перпеидикулярио к прямой

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$

ГЛАВА VI

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И КОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ. ПОВЕРХНОСТИ 2-го ПОРЯДКА

§ 1. Классификация поверхностей. Так же как и линии на плоскости, поверхности разделяются по их уравнениям в декартовой системе координат на алгебраические и трансцендентные. Уравнение алгебраической поверхности после преобразований может быть приведено к виду

$$F(x, y, z) = 0,$$

где левая часть уравнения есть целый многочлен относительно x, y, z. Степень этого многочлена относительно x, y, z даёт *порядок алгебраической поверхности*. Можно показать, что порядок поверхности не зависит от выбора координатных осей. Мы знаем, что поверхности 1-го порядка суть плоскости. Не касаясь исследования общего уравнения поверхностей 2-го порядка, мы в §§ 5—11 этой главы разберём все возможные типы таких поверхностей, отправляясь от их простейших уравнений.

§§ 2—4 будут посвящены разбору уравнений некоторых часто встречающихся поверхностей, которые могут быть как алгебраическими, так и трансцендентными.

§ 2. Цилиндрические поверхности (общий случай). Мы рассмотрели (гл. III, § 5) уравнение цилиндрической поверхности в том частном случае, когда образующие параллельны одной из осей координат. Рассмотрим теперь общий случай.

Как уже было отмечено (гл. III, § 5), *цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой, остающейся параллельной некоторой данной прямой и пересекающей данную линию L.* При этом линия L называется *направляющей*, а движущаяся прямая во всевозможных её положениях — *образующей*. Пусть направляющая цилиндрической поверхности определяется уравнениями

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Положим, что m, n и p суть направляющие коэффициенты обра-

зующих цилиндрической поверхности. Канонические уравнения образующих будут:

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}, \tag{2}$$

где (x, y, z) есть точка, принадлежащая направляющей, а X, Y, Z — текущие координаты. Исключая x, y и z из четырёх уравнений (1) и (2), получим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

Пример. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой

$$x=y=z,$$

а направляющей служит прямая

$$x+y-z-1=0, \quad x-y+z=0.$$

Канонические уравнения образующих будут:

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}.$$

Исключим x, y и z из последних четырёх уравнений. Обозначая через ρ величину каждого из последних отношений, найдём:

$$x=X-\rho, \quad y=Y-\rho, \quad z=Z-\rho.$$

Подставляя эти значения x, y и z в данные уравнения направляющей, получим:

$$X+Y-Z-\rho-1=0, \quad X-Y+Z-\rho=0.$$

Исключая, наконец, ρ, найдём:

$$2Y-2Z-1=0.$$

Это, очевидно, есть уравнение плоскости, проходящей через данную направляющую и параллельной прямой $x=y=z$.

§ 3. Конические поверхности. *Конической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой, проходящей через данную точку — вершину конуса — и пересекающей данную линию — направляющую конуса.* Эта прямая в любом её положении называется *образующей* конуса.

Пусть направляющая конуса имеет уравнения

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0, \tag{3}$$

а вершина конуса имеет координаты x_0, y_0, z_0. Канонические уравнения образующих конуса как прямых, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) и через точку (x, y, z) направляющей, будут:

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}. \tag{4}$$

Исключая x, y и z из четырёх уравнений (3) и (4), получим искомое уравнение конической поверхности. Это уравнение обладает

весьма простым свойством: оно однородно (т. е. все его члены — одного измерения) относительно разностей $X-x_0$, $Y-y_0$, $Z-z_0$. В самом деле, допустим сперва, что вершина конуса находится в начале координат ($x_0=y_0=z_0=0$). Пусть X, Y и Z — координаты любой точки конуса; они удовлетворяют, следовательно, уравнению конуса. После замены в уравнении конуса X, Y и Z соответственно через λX, λY, λZ, где λ — произвольный множитель, уравнение должно удовлетворяться, так как λX, λY и λZ суть координаты точки прямой, проходящей через начало координат в точку (X, Y, Z), т. е. образующей конуса. Следовательно, уравнение конуса не изменится, если все текущие координаты умножим на одно и то же число λ. Отсюда следует, что это уравнение должно быть однородным относительно текущих координат.

В случае, если вершина конуса лежит в точке (x_0, y_0, z_0), мы перенесём начало координат в вершину, и по доказанному преобразованное уравнение конуса будет однородно относительно новых координат, т. е. относительно $X-x_0$, $Y-y_0$, $Z-z_0$.

Пример. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=c.$$

Канонические уравнения образующих, проходящих через вершину (0, 0, 0) конуса и точку (x, y, z) направляющей, будут:

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}.$$

Исключим x, y и z из четырёх данных уравнений. Заменяя z через c, определим x и y из последних двух уравнений:

$$x=c\frac{X}{Z}, \quad y=c\frac{Y}{Z}.$$

Подставляя эти значения x и y в первое уравнение направляющей, будем иметь:

$$\frac{c^2}{a^2}\frac{X^2}{Z^2}+\frac{c^2}{b^2}\frac{Y^2}{Z^2}=1,$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0. \tag{5}$$

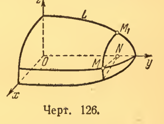
При $a=b$ направляющей конической поверхности будет окружность, и мы получим круговой конус.

§ 4. Поверхности вращения. Положим, что в плоскости yOz нам дана линия L, имеющая уравнение

$$F(Y, Z)=0.$$

Найдём уравнение поверхности, полученной от вращения этой линии вокруг оси Oy (черт. 126).

Возьмём произвольную точку $M(x, y, z)$ нашей поверхности и проведём через неё плоскость перпендикулярно к оси вращения Oy. Очевидно, в пересечении этой плоскости и нашей поверхности получится окружность с центром N на оси вращения. Координаты точки N будут $0, y, 0$. Радиус окружности MN как расстояние между точками N и M равен $\sqrt{x^2+z^2}$. С другой стороны, ясно, что этот радиус является абсолютной величиной аппликаты той точки M_1 данной линии L, ордината которой есть y. Следовательно, полагая в данном уравнении



Черт. 126.

$$Y = y,\ Z = \pm\sqrt{x^2+z^2}$$

(координаты точки M_1), мы получим искомое уравнение поверхности вращения:

$$F\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к следующему правилу:

Чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости yOz вокруг оси Oy, нужно в уравнении этой линии заменить z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

Аналогичные правила будут иметь место и по отношению к поверхностям, полученным вращением плоских линий вокруг других координатных осей.

Пример 1. Уравнение поверхности, образованной вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг оси Ox, будет:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1. \tag{6}$$

Если тот же эллипс вращается вокруг оси Oz, то уравнение полученной таким образом поверхности вращения будет иметь вид:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{6'}$$

Если $a > c$, то в первом случае имеем удлинённый, а во втором случае сжатый *эллипсоид вращения*. При $a = c$ получаем сферу.

Пример 2. Уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг оси Ox, будет:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1. \tag{7}$$

Это — так называемый *двуполостный гиперболоид вращения*.

Если ту же гиперболу будем вращать вокруг оси Oz, то полученная таким образом поверхность будет иметь уравнение

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{7'}$$

Это — так называемый *однополостный гиперболоид вращения*.

Пример 3. Уравнение поверхности, образованной вращением параболы

$$y^2=2pz$$

вокруг оси Oz, будет:

$$x^2+y^2=2pz. \tag{8}$$

Это — так называемый *параболоид вращения*.

§ 5. Эллипсоид. Мы видели (гл. VI, § 4), что уравнение поверхности, полученной от вращения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг оси Oz, будет:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Это уравнение определяет поверхность, называемую *эллипсоидом вращения*. Пересекая этот эллипсоид плоскостью $z=h\,(|h|\leqslant c)$, параллельной плоскости xOy, получим в сечении окружность, уравнения которой будут:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h \tag{9}$$

и радиус которой равен

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

Следовательно, при изменении h от значения $-c$ до значения $+c$ окружность (9) описывает эллипсоид вращения.

Возьмём теперь вместо окружности (9) эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h, \tag{10}$$

лежащий в плоскости $z=h$, параллельной плоскости xOy, полуоси которого суть:

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \text{ и } b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}. \tag{11}$$

При изменении h от $-c$ до $+c$ этот эллипс описывает поверхность, уравнение которой получим, исключив h из двух уравнений (10):

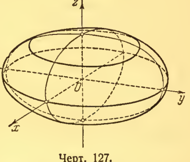
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}, \text{ или } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{I}$$

Поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением (I), называется *эллипсоидом*, а величины a, b, c — *полуосями* эллипсоида.

Пересекая эллипсоид плоскостями координат $z=0$, $y=0$, $x=0$, получим в сечении эллипсы:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0;\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0. \quad (12)$$

Как мы уже видели, в сечении эллипсоида плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xOy, получается эллипс (10) с полуосями (11). При изменении h от $-c$ до $+c$ эти полуоси изменяются, оставаясь пропорциональными полуосям a и b эллипса, лежащего в плоскости xOy (черт. 127). Два эллипса с пропорциональными полуосями называются подобными. Таким образом, эллипсоид можно рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом (плоскость которого остаётся параллельной плоскости xOy), который при движении остаётся себе подобным и концы осей которого скользят по эллипсам (12) в плоскостях xOz и yOz.



Черт. 127.

Не уменьшая общности, мы можем считать $a \geqslant b \geqslant c$. Если $a=b=c$, то уравнение (I) определяет сферу; если $a>b=c$, то уравнение (I) определяет удлинённый эллипсоид вращения с осью вращения Ox; если $a=b>c$, то уравнение (I) определяет сжатый эллипсоид вращения с осью вращения Oz. Если среди чисел a, b и c нет равных, то эллипсоид называется *трёхосным*.

Уравнение (I) содержит только квадраты координат, откуда следует, что эллипсоид симметричен относительно начала координат, а плоскости координат суть его плоскости симметрии, так как если некоторая точка $M(x, y, z)$ находится на эллипсоиде, то и точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ находятся на эллипсоиде при произвольном выборе знаков у координат.

§ 6. Однополостный гиперболоид. Уравнение поверхности, полученной от вращения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

около оси Oz, будет:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(гл. VI, § 4). Это уравнение определяет поверхность, называемую *однополостным гиперболоидом вращения*. Пересекая его плоскостью

$z=h$, параллельной плоскости xOy, получим в сечении окружность, уравнения которой будут

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\ z=h \tag{13}$$

и радиус которой равен

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Следовательно, при изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ окружность (13) описывает однополостный гиперболоид вращения.

Возьмём теперь вместо окружности (13) эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\ z=h, \tag{14}$$

лежащий в плоскости $z=h$, параллельной плоскости xOy, полуоси которого суть:

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}. \tag{15}$$

При изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ этот эллипс описывает поверхность, уравнение которой получим, исключив h из двух уравнений (14):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{II}$$

Поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением (II), называется *однополостным гиперболоидом*, а величины a, b, c — его *полуосями*.

Пересекая поверхность (II) плоскостями координат $z=0$, $y=0$, $x=0$, получим в сечении соответственно эллипс и две гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0; \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0;$$
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0. \tag{16}$$

Как следует из предыдущего, в сечении однополостного гиперболоида плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xOy, получается эллипс (14) с полуосями (15). При изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ эти полуоси изменяются, оставаясь пропорциональными полуосям a и b эллипса, лежащего в плоскости xOy, и мы можем однополостный гиперболоид рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом (плоскость которого остаётся параллельной

плоскости xOy), который при движении остаётся себе подобным и концы осей которого скользят по гиперболам (16) в плоскостях xOz, yOz (черт. 128). Если $a=b$, то уравнение (II) определяет однополостный гиперболоид вращения с осью вращения Oz.

Уравнение (II) содержит только квадраты координат, откуда следует, что однополостный гиперболоид симметричен относительно начала координат, а плоскости координат являются его плоскостями симметрии.

Черт. 128.

§ 7. Двуполостный гиперболоид. ***Двуполостный гиперболоид вращения*** мы получим, если гиперболу

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

будем вращать вокруг оси Oz. Его уравнение будет (гл. VI, § 4):

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1.$$

Пересекая его плоскостью $z=h\,(|h|\geqslant c)$, перпендикулярной к оси вращения Oz, получим в сечении окружность, уравнения которой будут

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\ z=h \tag{17}$$

и радиус которой равен

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}. \tag{18}$$

При изменении h от c до $+\infty$ окружность (17) описывает одну полость гиперболоида, а при изменении h от $-c$ до $-\infty$ окружность (17) описывает другую его полость.

Возьмём вместо окружности (17) эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\ z=h, \tag{19}$$

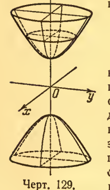
лежащей в плоскости $z=h$, параллельной плоскости xOy, полуоси которого суть:

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\ \text{ и }\ b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}. \tag{20}$$

При изменении h от $-\infty$ до $-c$ и от $+c$ до $+\infty$ этот эллипс описывает двуполостную поверхность, уравнение которой получим, исключив h из двух уравнений (19):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1,\ \text{ или }\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{III}$$

Поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением (III), называется *двуполостным гиперболоидом*, а величины a, b, c — его *полуосями*. Пересекая эту поверхность плоскостями координат $z=0$, $y=0$, $x=0$, мы получим в сечении соответственно мнимое место и две гиперболы:



Черт. 129.

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \quad y=0; \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x=0. \tag{21}$$

Как было выше сказано, в сечении двуполостного гиперболоида плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xOy, получается эллипс (19) с полуосями (20), когда $|h|\geqslant c$. Отсюда вытекает, что двуполостный гиперболоид мы можем рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом (плоскость его остаётся параллельной плоскости xOy), который при движении остаётся себе подобным и концы осей которого скользят по гиперболам (21) в плоскостях xOz и yOz (черт. 129). Поверхность симметрична относительно начала координат, а плоскости координат суть её плоскости симметрии.

При $a=b$ уравнение (III) определяет двуполостный гиперболоид вращения с осью вращения Oz.

§ 8. Эллиптический параболоид. *Параболоид вращения* получается вращением параболы

$$y^2=2pz$$

вокруг оси Oz. Его уравнение будет (гл. VI, § 4):

$$x^2+y^2=2pz.$$

В сечении его плоскостью $z=h$ ($h\geqslant 0$), перпендикулярной к оси вращения Oz, получается окружность, уравнения которой будут:

$$x^2+y^2=2ph, \quad z=h \tag{22}$$

и радиус которой равен

$$\sqrt{2ph}. \tag{23}$$

Следовательно, при изменении h от 0 до $+\infty$ окружность (22) описывает параболоид вращения.

Возьмём вместо окружности (22) эллипс

$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1, \quad z=h \tag{24}$$

(p, q и h — положительные числа), лежащий в плоскости $z=h$, параллельной плоскости xOy, полуоси которого суть:

$$\sqrt{2ph}, \quad \sqrt{2qh}. \tag{25}$$

При изменении h от 0 до $+\infty$ этот эллипс описывает поверхность 2-го порядка, называемую *эллиптическим параболоидом*, уравнение которой получим, исключив h из двух уравнений (24):

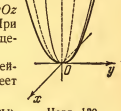
$$\frac{x^2}{2pz}+\frac{y^2}{2qz}=1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z. \qquad \text{(IV)}$$

Пересекая эту поверхность плоскостями координат $z=0$, $y=0$, $x=0$, получим в сечении соответственно точку и две параболы:

$$x^2=2pz, \quad y=0; \quad y^2=2qz, \quad x=0. \qquad (26)$$

Из предыдущего усматриваем, что эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом, который остаётся себе подобным и концы осей которого скользят по параболам (26) (черт. 130); плоскость эллипса при движении остаётся параллельной плоскости xOy.

Уравнение (IV) содержит только квадраты координат x и y, а потому плоскости xOz и yOz являются плоскостями симметрии поверхности. При $p=q$ уравнение (IV) определяет параболоид вращения с осью вращения Oz.



Черт. 130.

§ 9. Гиперболический параболоид. Простейшее уравнение *гиперболического параболоида* имеет вид:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p>0,\ q>0), \qquad \text{(V)}$$

т. е. отличается от уравнения (IV) только знаком при y^2. Плоскость координат xOz пересекает эту поверхность по параболе

$$x^2=2pz, \qquad (27)$$

для которой ось Oz является осью симметрии и которая расположена в положительном направлении оси Oz. Плоскость $x=h$, параллельная плоскости yOz, пересекает поверхность (V) по параболе, уравнения которой будут:

$$\left.\begin{aligned} y^2&=-2qz+\frac{qh^2}{p},\\ x&=h, \end{aligned}\right\}$$

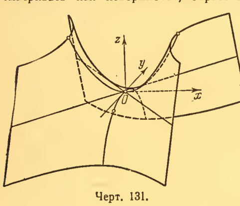
или

$$\left.\begin{aligned} y^2&=-2q\left(z-\frac{h^2}{2p}\right),\\ x&=h. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Из уравнения (28) усматриваем, что эти параболы, расположенные в плоскостях $x=h$, имеют один и тот же параметр, их оси симметрии находятся в плоскости xOz и параллельны оси Oz, ветви парабол направлены вниз (в отрицательном направлении оси Oz), а

их вершины имеют координату $z=\frac{h^2}{2p}$. Так как уравнение параболы (27), расположенной в плоскости xOz, при $x=h$ даёт то же значение для z, то отсюда заключаем, что вершины парабол (28) расположены на параболе (27) (черт. 131).

Таким образом, гиперболический параболоид (V) можно рассматривать как поверхность, образованную движущейся параболой, ось симметрии которой остаётся в плоскости xOz, а вершина движется по параболе (27). Плоскость параболы остаётся параллельной плоскости yOz. Пересекая гиперболический параболоид (V) плоскостью $z=h$, получим в сечении гиперболу, уравнения которой будут:



Черт. 131.

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h,\ z=h.$$

При $h>0$ действительная ось симметрии гиперболы будет параллельна оси Ox, при $h<0$ действительная ось симметрии гиперболы будет параллельна оси Oy.

Плоскость xOy даёт в сечении с поверхностью (V) линию

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0,\ z=0,$$

уравнения которой распадаются на две пары уравнений:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0,\ z=0$$

и

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0,\ z=0,$$

и, следовательно, это сечение есть совокупность двух пересекающихся прямых. Прямые сечения плоскостью $z=0$ служат как бы переходом от одного семейства гипербол (получающихся в сечении плоскостью $z=h$ при $h>0$) к другому семейству.

Так как уравнение (V) содержит только квадраты координат x и y, то плоскости xOz и yOz являются плоскостями симметрии для поверхности.

§ 10. Конус 2-го порядка. В примере § 3, гл. VI мы составили уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей линией

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=c.$$

Полученное уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{VI}$$

определяет *конус 2-го порядка*. Поверхность симметрична относительно начала координат, а плоскости координат суть её плоскости симметрии (черт. 132).

§ 11. Цилиндры 2-го порядка. В примерах § 5 гл. III мы рассмотрели уравнения цилиндров 2-го порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{VII}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{VIII}$$

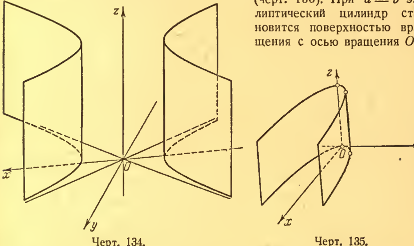
$$y^2=2px. \tag{IX}$$

Направляющие линии этих цилиндров, лежащие в плоскости xOy, суть соответственно эллипс, гипербола и парабола. Образующие этих цилиндров параллельны оси Oz.

Черт. 132.

Черт. 133.

Цилиндры, которые определяются уравнениями (VII), (VIII), (IX), носят названия *эллиптического* цилиндра (черт. 133), *гиперболического* цилиндра (черт. 134) и *параболического* цилиндра (черт. 135). При $a=b$ эллиптический цилиндр становится поверхностью вращения с осью вращения Oz.



Черт. 134.

Черт. 135.

§ 12. Прямолинейные образующие поверхностей 2-го порядка. Конструкции В. Г. Шухова. Поверхность, образованная движе-

нием прямой, называется *линейчатой*, а лежащие на ней прямые — *прямолинейными образующими*.

Примерами таких поверхностей могут служить цилиндрическая и коническая. Среди поверхностей 2-го порядка прямолинейными образующими обладают (кроме конусов и цилиндров) однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Рассмотрим однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Его уравнение можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \qquad (29)$$

Составим систему уравнений первой степени:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

где k — произвольное число.

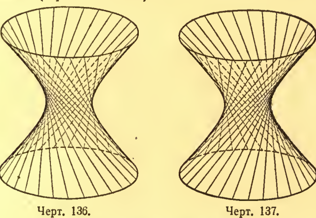
При определённом значении k эти уравнения определяют прямую линию. Меняя параметр k, мы получим совокупность прямых (семейство прямых). Уравнения (30) составлены так, что почленное перемножение их даёт уравнение поверхности (29). Следовательно, всякая точка (x, y, z), координаты которой удовлетворяют системе (30), лежит на поверхности (29). Таким образом, каждая из прямых семейства целиком располагается на поверхности однополостного гиперболоида.

Можно показать, что на поверхности однополостного гиперболоида располагается ещё одно семейство прямолинейных образующих, отличное от уже рассмотренного. Оно определяется уравнениями

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l\left(1-\frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{l}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

где l — произвольный параметр.

Кроме того, можно доказать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямой из каждого из этих семейств (черт. 136 и 137).



Черт. 136. Черт. 137.

При помощи аналогичных рассуждений можно убедиться, что на поверхности гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

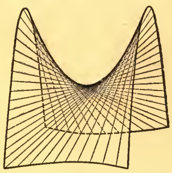
также располагаются два семейства прямолинейных образующих (одно из них изображено на черт. 138).

Их уравнения

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2kz,$$
$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{1}{k}$$

и

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{1}{l},$$
$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=2lz,$$



Черт. 138.

где k и l — произвольные параметры.

Через каждую точку поверхности проходит по одной прямой каждого семейства.

Наличие прямолинейных образующих у однополостного гиперболоида используется в строительной технике. Идея такого использования и практическое осуществление её принадлежат известному русскому инженеру, почётному члену АН СССР Владимиру Григорьевичу Шухову (1853—1939).

В. Г. Шухов осуществил конструкции мачт, башен и опор, составлённые из металлических балок, располагающихся по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида вращения. Первая такая конструкция была осуществлена В. Г. Шуховым при сооружении опоры высотою в 26 *м* для водонапорного резервуара (1896). Высокая прочность таких конструкций в соединении с лёгкостью определила их большое распространение в нашей стране и за рубежом.

Упражнения

1. Составить уравнение поверхности, полученной от вращения прямой линии $y = x$ вокруг оси Ox.

2. Составить уравнение линии пересечения конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ с плоскостью $z = c$.

3. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и с направляющей

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,\ z=h.$$

4. Какую поверхность определяет уравнение $x^2 = y^2 + z^2$?

5. Какую поверхность определяет уравнение

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0?$$

6. Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2+y^2+4z^2-1=0?$$

7. Какую поверхность представляет уравнение $x^2+y^2-z^2-1=0$?

8. Какую поверхность определяет уравнение $x^2-y^2-z^2-4=0$?

9. Какая поверхность определяется уравнением $z = x^2 + y^2$?

10. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $x = y = z$, а направляющей служит линия $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

ОТВЕТЫ

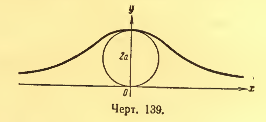
К стр. 33—35 (гл. I, ч. 1)

2. (5, 2). **3.** (—4, 2). **4.** $(a, -b)$. **5.** $(-a, b)$. **6.** $(-a, -b)$. **8.** (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2) или (0, 0), (0, 2), (—2, 2), (—2, 0), или (0, 0), (—2, 0), (—2, —2), (0, —2), или (0, 0), (0, —2), (2, —2), (2, 0). **9.** $(\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$. **10.** (3, 0), (0, 4), (—3, 0), (0, —4) или (4, 0), (0, 3), (—4, 0), (0, —3). **11.** $(a, 0)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-a, 0)$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. **12.** $AB=\sqrt{98}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **13.** $\angle A$ — тупой. **15.** $10+2\sqrt{5}$. **16.** $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, 1. **17.** $x=-14$, $y=17$. **18.** (—3, 4; 0). **19.** (15, 15), или (3, 3). **20.** (1, 10), или (—11, 10). **21.** (—3, 9). **22.** (4, 5); (—2, —3). **23.** $(^8/_5, {}^8/_5)$. **24.** (—3, —5) или (2, —7). **25.** $x=\frac{\pm(a\pm\sqrt{b^2-h^2})}{2}$, $y=\frac{h}{2}$. **26*.** Обозначая координаты середины стороны BC через a и b, получаем $a=-1$, $b=4$. Так как медианы треугольника пересекаются в точке, в которой каждая из них делится в отношении 2:1 (считая от вершины, из которой проводится медиана), то координаты (x, y) искомой точки по формулам (6) и (7) будут: $x=\frac{1+2\cdot(-1)}{2+1}=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2+2\cdot 4}{2+1}=\frac{10}{3}$. **27.** (3, —4), (4, —2), (3, —6), (2, —4). **28.** $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. **30.** $^8/_3$ кв. ед. **31.** 33,5 кв. ед. **32.** Лежат. **33.** $P=13$, $\varphi=\operatorname{arctg}{}^{12}/_5$. **34.** $\left[\frac{1}{4}(5+\sqrt{17});\ \frac{1}{8}(7+\sqrt{17})\right]$. **35.** Расстояние центра тяжести от большего основания равно $\frac{h(2b+a)}{3(a+b)}$, а от стороны, перпендикулярной к основаниям, $\frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$. **36.** $A(1, 1)$, $B(2, 2\sqrt{3})$, $C(-4, 4)$, $D(\sqrt{3}, -1)$. **37.** $A\left(\sqrt{13}, \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $B\left(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$, $C(3, 0)$, $D\left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$.

К стр. 44—45 (гл. II, ч. 1)

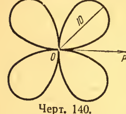
1*. Из уравнения кривой непосредственно видно, что кривая симметрична относительно оси Oy: перемена знака при x не изменяет значения y, так как x содержится в уравнении во второй степени. Так как значение $y=0$ не удовлетворяет уравнению кривой, то кривая не пересекает оси Ox.

Решим теперь уравнение кривой относительно y: $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$. Считая постоянное $a > 0$, замечаем, что при всех значениях x ордината $y > 0$; это означает, что кривая целиком расположена в верхней полуплоскости. Из этого же выражения видно также, что с возрастанием абсолютной величины x ордината y уменьшается. При $x = 0$ ордината $y = 2a$. Произведя такое исследование уравнения кривой и построив некоторое количество точек кривой, координаты которых определим непосредственным вычислением одной из текущих координат по данным произвольным значениям другой, убедимся, что кривая имеет такой вид, как изображено на черт. 139.



Черт. 139.

При построении кривой следует постоянному a дать некоторое произвольное значение. **2*.** Полярный радиус r достигает наибольшего значения, когда $\sin 2\varphi$ имеет наибольшее значение, что наступает, когда $\sin 2\varphi = 1$, т. е. когда $\varphi = 45°$, $225°$ и т. д.; тогда $r = 10$. Полярный радиус r принимает наименьшее значение, когда $\sin 2\varphi$ получает наименьшее значение, что имеет место, когда $\sin 2\varphi = -1$, т. е. когда $\varphi = 135°$, $315°$ и т. д. Это наименьшее значение r есть -10. Когда $\varphi = 0°$, $90°$, $180°$ и т. д., тогда $r = 0$. Теперь следует построить ряд точек кривой, координаты которых можно определить непосредственным нахождением одной из них по данным произвольным значениям другой. Кривая состоит из четырёх петель, как показывает прилагаемый черт. 140, и по этой причине и называется четырёхлепестковой



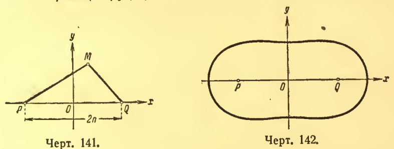
Черт. 140.

розой. **6.** $5x - 3y + 17 = 0$. **7.** $y = \frac{x^2}{8} + 2$. **8.** Окружность $x^2 + y^2 = 12x$. **9.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (эта кривая называется эллипсом). **10*.** Прежде чем составлять уравнение кривой, нужно выбрать систему координат. От выбора системы координат зависит бо́льшая или меньшая сложность искомого уравнения. Так, ранее мы видели, что если начало координат поместить в центре окружности, то уравнение её будет иметь более простой вид, чем при другом выборе системы координат. Правил, которыми можно было бы руководствоваться при выборе системы координат, не существует, и умение делать наиболее удобный выбор даётся только опытом. Для составления искомого уравнения в данном случае оказывается удобным за ось Ox принять прямую, проходящую через точки P и Q (тогда будут весьма просты координаты точек P и Q), за ось Oy принять прямую, делящую пополам отрезок PQ (равноправность точек P и Q позволяет предполагать симметрию кривой). Пусть x и y будут координатами произвольной точки M, лежащей на искомой кривой (черт. 141). Это значит, что x и y будут текущими координатами. Составить уравнение кривой (геометрического места) — это значит выразить при помощи формулы (уравнения) геометрическое свойство кривой. Это достигается при помощи установления соотношения между текущими координатами и постоянными

величииами, характеризующими данную кривую. В данном случае, следовательно, нам нужно установить соотношение между x, y и постоянными m^2 и n. Из определения геометрического места следует (черт. 141): $PM \cdot QM = m^2$. Выражая длины отрезков PM и QM по формуле расстояния между двумя точками [координаты точек P и Q по отношению к выбраниой иами системе координат будут $P\,(-n,\,0)$, $Q\,(+n,\,0)$], получаем:

$$\sqrt{(x+n)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-n)^2+y^2}=m^2.$$

Это и есть уравнение даниого геометрического места; ио, очевидио, его следует упростить: освободить от радикалов, произвести возможные сокращения и т. п. Произведя с этой целью элементарные преобразования, получаем: $(x^2+y^2+n^2+2nx)(x^2+y^2+n^2-2nx)=m^4$, или $(x^2+y^2+n^2)^2-4n^2x^2=m^4$, или $(x^2+y^2)^2+2n^2(x^2+y^2)-4n^2x^2=m^4-n^4$ и окончательно:



Черт. 141. Черт. 142.

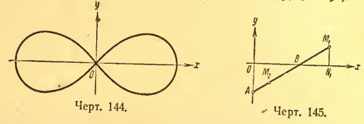
$(x^2+y^2)^2-2n^2(x^2-y^2)=m^4-n^4$. Для построения кривой исследуем иайденное уравнение. Так как замена произвольного значения x в уравнении кривой значением, противоположным по знаку, но равным по абсолютной величине, ие изменяет значения y и, аналогично, замена произвольного значения y значением, равным по абсолютной величине, но противоположным по знаку, не изменяет значения x, то кривая симметрична относительно осей координат. Далее, из геометрического определения рассматриваемого геометрического места непосредственно очевидно, что эта кривая есть замкнутая кривая. Положив $y=0$, а затем $x=0$, найдём точки пересечения кривой с осями Ox и Oy. Построив ряд точек кривой, координаты которых можно найти, вычисляя из найденного уравнения одну из координат по данным произвольным значениям другой, и соединив их плавной линией, получим (при $m>n$) кривую, изображённую на черт. 142. **11*.** а) При выборе осей координат, как в упражнении 10*, уравнение лемнискаты принимает вид: $(x^2+y^2)^2=2m^2(x^2-y^2)$. б) Если полюс совместить с началом прямоугольной системы координат, а полярную ось совместить с осью Ox, то уравнение лемнискаты будет иметь вид: $r^2=2m^2\cos 2\varphi$. *Указание.* Для вывода уравнения в полярных координатах устанавливаем прежде всего положение системы координат: полюс совмещаем с началом координат выбранной нами прямоугольной системы, а полярную ось совмещаем с осью Ox. Тогда будем иметь (черт. 143): $SM\cdot QM=m^2$. Выражая отрезки SM и QM по известной формуле тригонометрии, приходим к уравнению

Черт. 143.

$$\sqrt{r^2+m^2+2mr\cos\varphi}\cdot\sqrt{r^2+m^2-2mr\cos\varphi}=m^2.$$

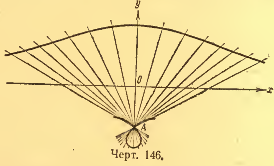
Производя элемеитарные преобразования, получаем: $(r^2+m^2)^2-4m^2r^2\cos^2\varphi=m^4$; $r^4=4m^2r^2\cos^2\varphi-2m^2r^2$, или $r^4=2m^2r^2(2\cos^2\varphi-1)$, и окончательно:

$r^2 = 2m^2 \cos 2\varphi$. Эта кривая изображена на черт. 144. **12*.** $x^2y^2 = (y+a)^2(b^2-y^2)$. *Указание.* Из подобия треугольников BM_1N_1 и BAO (черт. 145) имеем: $\frac{y}{BN_1} = \frac{a}{OB}$. Так как $OB = x - BN_1$ и $BN_1 = \sqrt{b^2-y^2}$, то получаем следующее уравнение $\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}} = \frac{a}{x-\sqrt{b^2-y^2}}$, или $xy = (a+y)\sqrt{b^2-y^2}$, и окончательно: $x^2y^2 = (a+y)^2(b^2-y^2)$. Способ



Черт. 144. Черт. 145.

построения кривой (черт. 146) ясен из её геометрического определения. На чертеже изображён вид кривой для случая $a < b$. Кривые для случаев $a > b$ и $a = b$ вычертите самостоятельно. Весьма полезно убедиться в спра-



Черт. 146.

ведливости полученных графиков путём исследования уравнения конхоиды. **13.** $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$. *Указание.* Из черт. 147 имеем: $\frac{y}{AN_1} = \frac{OB}{AO}$, $AN_1 = a + x$, $AO = a$, $OB^2 = BM_1^2 = x^2 + (y - OB)^2$, откуда $OB = \frac{x^2+y^2}{2y}$. Подставляя найденные значения в составленную выше пропорцию, после элементарных преобразований приходим к уравнению $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$. Вид строфоиды указан на черт. 148, из которого виден и способ построения кривой. **14*.** $x^3 = y^2(2a - x)$. *Указание.* Из черт. 149 имеем:

Черт. 147.

$$OP = \sqrt{x^2+y^2}, \quad ED^2 = OE \cdot BE,$$

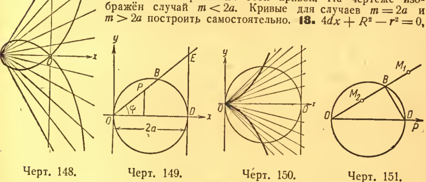
откуда

$$BE = \frac{ED^2}{OE}; \quad ED = 2a \cdot \operatorname{tg} \varphi = 2a \cdot \frac{y}{x}, \quad OE = \frac{2a}{\cos \varphi} = \frac{2a\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

Так как $OP = BE$, то

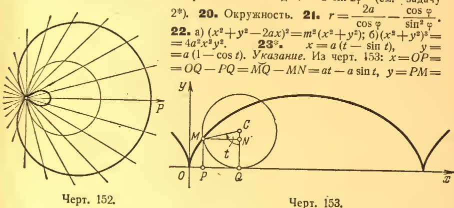
$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{4a^2y^2\cdot x}{x^2\cdot 2a\sqrt{x^2+y^2}},$$

и окончательно: $x^3 = y^2(2a-x)$. Кривая изображена на черт. 150. Из этого чертежа ясен и способ построения кривой. **15*.** $r = m + 2a\cos\varphi$. *Указание.* Примем точку O за полюс, а полярную ось совместим с диаметром OD. Из прямоугольного треугольника OBD (черт. 151) имеем: $r = OM_1 = BM_1 + OB = m + 2a\cos\varphi$. Следовательно, искомое уравнение есть: $r = m + 2a\cos\varphi$. Кривая дана на черт. 152, из которого ясен и способ вычерчивания этой кривой. На чертеже изображён случай $m < 2a$. Кривые для случаев $m = 2a$ и $m > 2a$ построить самостоятельно. **18.** $4dx + R^2 - r^2 = 0$,



Черт. 148. Черт. 149. Черт. 150. Черт. 151.

если за ось Ox принять линию центров, а ось Oy провести через середину отрезка, соединяющего центры окружностей. **19.** Если за полюс принять вершину прямого угла, а за полярную ось одну из его сторон, то уравнение геометрического места будет иметь вид $r = a\sin 2\varphi$ (см. задачу 2*). **20.** Окружность. **21.** $r = \frac{2a}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **22.** а) $(x^2+y^2-2ax)^2 = m^2(x^2+y^2)$; б) $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. **23*.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$. *Указание.* Из черт. 153: $x = OP = OQ - PQ = \overset{\frown}{MQ} - MN = at - a\sin t$, $y = PM =$



Черт. 152. Черт. 153.

$= QN = QC - NC = a - a\cos t$, где t — угол поворота окружности (считая $t > 0$ при повороте по часовой стрелке). **24.** $x = vt\cos\alpha$, $y = vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$.

К стр. 69—72 (гл. III, ч. 1)

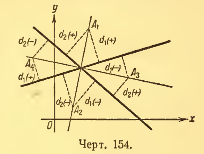
1. а) $y=x+5$; б) $y=\sqrt{3}x+5$; в) $y=-x+5$; г) $y=5$. **2.** $\sqrt{3}x-3y-9=0$. **3.** а) $y=x$; б) $y=-x$; в) $y=0$. **5.** $4x-3y-12=0$. **7.** 45°. **10.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$, $-\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=-1$, $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$; или $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, $-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=-1$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$. **11.** 20 кв. ед. **12.** $45^3/_8$ кв. ед. **13.** а) $a=-b$; б) $a=-\frac{b\sqrt{3}}{3}$; в) $a=b$. **15.** $x-y+1=0$. **16.** $7x-2y-20=0$. **17.** $3x+y-5=0$. **18.** $(^{45}/_{22}, {}^{24}/_{11})$. **19.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) 0; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 0; д) $\frac{5\pi}{6}$; е) $\frac{3\pi}{4}$; ж) $\operatorname{tg}\theta=-7$; з) $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}$; и) $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{4}$ (если рассматривать каждую пару прямых в порядке их задания). **20.** 90°. **21.** $9x+y-30=0$, $x-9y+24=0$. **22.** 26°30′; 71°30′; 82°. **23.** 1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, 135°, arctg $^1/_2$; arctg $^1/_3$. **24.** (4, 1). **25.** а) $y=2x$; б) $y+3x=0$; в) $2y=x$ и $y=-2x$. **26.** а) $y=3$; б) $y=x+5$; в) $y=4x+11$; г) $(2-\sqrt{3})x-(1+2\sqrt{3})y+7+4\sqrt{3}=0$, или $(2+\sqrt{3})x-(1-2\sqrt{3})y+7-4\sqrt{3}=0$; д) $y+2x+1=0$. **27.** $5x+25y+1=0$; $x+5y-5=0$. **28.** $5x-4y-16=0$. **29.** $x+3y-1=0$. **30.** $53x+202y=0$. **31.** $x+y-6=0$; $x-y=0$. **32.** $4x-3y-17=0$. **33.** $3x-2y-7=0$. **34.** $x+y=0$. **35.** $5y-9=0$; $9x-18y-8=0$; $9x-3y-35=0$. **36.** $x-7y+10=0$; $x+3=0$; $x-y+4=0$; $(-3, 1)$. **37.** $y+2x-2=0$; $x+2y=2$; $y=x$. **38.** $x-y+3=0$; $x+2y-4=0$; $7x-y+7=0$; $(-^2/_3, {}^7/_3)$. **39*.** Из уравнений сторон треугольника находим координаты его вершин $A(3, 1)$, $B(0, 4)$, $C(-1, 0)$. Определяем, далее, середину стороны AB; координаты этой точки равны $(^3/_2, {}^5/_2)$. Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от вершины), то для нахождения точки пересечения медиан пользуемся формулами деления отрезка в данном отношении; таким образом, найдём точку пересечения медиан $(^2/_3, {}^5/_3)$. Теперь остаётся провести прямую через (0, 0) и $(^2/_3, {}^5/_3)$, для чего следует применить уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Следовательно, окончательно имеем: $\frac{y}{^5/_3}=\frac{x}{^2/_3}$, или $5x-2y=0$. **40.** $3x-4y=0$. **41*.** (2, 0). *Указание.* Искомая точка является точкой пересечения с данной прямой перпендикуляра, восставленного к отрезку, соединяющему данные точки, в его середине. **42.** (1, 1). **43.** $(^{11}/_6, {}^1/_6)$. **44.** $x+y-11=0$; $3x-y-16=0$. **45.** $(2\pm2\sqrt{3}, 3)$. **47.** $x-\sqrt{3}y+14=0$. **48.** $x+\sqrt{3}y-10=10$. **50*.** 3, $(2^{11}/_{17}, -1^7/_{17})$; 7, $(-5^3/_5, -4^1/_5)$. *Указание.* Приведя уравнения данных прямых к нормальному виду, получаем: $^{15}/_{17}x-{}^8/_{17}y-3=0$ и $-^4/_5x-{}^3/_5y-7=0$, откуда видим, что искомые длины перпендикуляров равны соответственно 3 и 7. Так как $\cos\alpha=\frac{x}{p}$ и $\sin\alpha=\frac{y}{p}$, где x и y суть координаты основания перпендикуляра p, опущенного из начала координат на прямую, и α — угол, образуемый перпендикуляром с осью Ox, то искомые координаты будут найдены из формул $x=p\cos\alpha$, $y=p\sin\alpha$. Значит, в нашем случае координаты оснований будут: $x=3\cdot{}^{15}/_{17}=2^{11}/_{17}$; $y=3\cdot(-^8/_{17})=-1^7/_{17}$; $x=7\cdot(-^4/_5)=-5^3/_5$; $y=7\cdot(-^3/_5)=-4^1/_5$. **51.** 5,2 **52.** $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ и $\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$. **53*.** $3x-4y-25=0$ и $3x-4y+5=0$. *Указание.* Прежде всего очевидно, что

задача имеет два ответа, так как прямую, параллельную данной прямой и отстоящую от неё на расстоянии 3 единиц, можно провести как по одну, так и по другую сторону от данной прямой.

В одном случае отклонение любой точки искомой прямой от данной прямой будет равно -3, а в другом случае $+3$. Следовательно, подставляя в формулу (29) (гл. III, § 15) координаты произвольной точки (x, y) искомой прямой, получим:

$$\frac{3x-4y-10}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm 3.$$

Это и будут уравнения искомых прямых, так как x и y являются текущими координатами точки, лежащей на искомой прямой. Простые преобразования приводят нас к ответу, данному выше. **54.** $5x+12y-37=0$ и $5x+12y+41=0$. **55*.** $|d|=7$. *Указание.* Для определения искомого расстояния следует на одной из прямых выбрать фиксированную точку и определить расстояние от этой точки до другой прямой. В данной задаче удобно, например, из уравнения первой прямой, положив $y=0$, определить точку (5, 0). Тогда отклонение этой точки от второй прямой выразится числом $\frac{3\cdot 5+4\cdot 0+20}{-\sqrt{3^2+4^2}}=-7$. **56.** $|d|=1$. **57.** $0{,}3\sqrt{5}$. **58*.** $3x-4y-7=0$; $5x+12y-49=0$. *Указание.* Уравнение искомой прямой берём в форме уравнения прямой, проходящей через данную точку (5, 2) по направлению k: $y-2=k(x-5)$. Таким образом, задача сводится к нахождению углового коэффициента k. Так как искомая прямая должна проходить на расстоянии 4 единиц от точки $(-3, 1)$, то для определения k можно воспользоваться формулой, выражающей отклонение данной точки от прямой. Для этого надо уравнение прямой привести к нормальному виду и вместо текущих координат подставить координаты $(-3, 1)$. Таким образом, будем иметь: $\frac{1-8k}{\sqrt{k^2+1}}=\pm 4$, откуда и найдём значения углового коэффициента; $k_1={}^3/_4$; $k_2=-{}^5/_{12}$. Подставляя эти значения в уравнение искомой прямой, мы найдём уравнения двух прямых: $3x-4y-7=0$; $5x+12y-49=0$. **59.** $7x-6y-19=0$ и $9x+2y-5=0$. **60*.** $3x-3y+19=0$; $3x+3y-5=0$. *Указание.* Биссектриса есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла. Следовательно, отклонения d_1 и d_2 любой точки биссектрисы от сторон угла будут равны по абсолютной величине. Для всех точек биссектрисы углов, в которых лежат A_1 и A_3 (черт. 154), эти отклонения одинаковы и по величине, и по знаку, т. е. координаты точек биссектрисы A_1A_3 удовлетворяют уравнению $d_1-d_2=0$. Для биссектрисы же смежных углов уравнение будет иметь вид $d_1+d_2=0$, так как отклонения d_1 и d_2 будут равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Следовательно, в нашем случае для искомых биссектрис получим уравнения:



Черт. 154.

$$\frac{3x+4y-9}{5}-\frac{12x+9y-8}{15}=0 \quad \text{и} \quad \frac{3x+4y-9}{5}+\frac{12x+9y-8}{15}=0,$$

или

$$3x-3y+19=0 \quad \text{и} \quad 3x+3y-5=0.$$

Угловые коэффициенты 1 и -1 найденных прямых удовлетворяют условию перпендикулярности. **61.** $3x-y+55=0$; $5x+15y+3=0$. **62.** $x+y=0$. **63.** $(1, -4)$ и $\left(3\frac{6}{7}, -1\frac{1}{7}\right)$. **64.** $x+3y+7=0$; $3x-y+9=0$ и $3x-y-3=0$. **65.** $3x+y-14=0$ и $x+2y-2=0$; $x-3y+2=0$ и $x+2y-14=0$. **66.** Прямая, перпендикулярная к прямой, соединяющей заданные точки. **67.** Прямая.

К стр. 100—106 (гл. IV, ч. 1)

1. а) $(x+2)^2+(y+3)^2=9$; б) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$; в) $(x-5)^2+(y-6)^2=13$. **2*.** $(x-3)^2+(y+5)^2=100$. *Указание.* Уравнению окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ должны удовлетворять координаты данных точек. Подставляя последовательно вместо текущих координат координаты этих точек, получим три уравнения относительно неизвестных величин a, b и r^2; решив эту систему, найдём искомое уравнение. **3*.** $B=0$, $C=A$, $D=-6A$, $E=-4A$, $F=-12A$. *Указание.* Уравнение окружности радиуса 5 с центром в точке $(3, 2)$ может быть написано в виде $(x-3)^2+(y-2)^2=25$, или, раскрывая скобки и перенося все члены в левую часть уравнения: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$. Так как уравнение $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ должно выражать эту же окружность, то коэффициенты этого уравнения должны быть пропорциональны коэффициентам написанного выше уравнения. **4*.** а) $(2, -1)$, $r=2$; б) $(-{}^5/_4, {}^3/_4)$, $r=\frac{5\sqrt{2}}{4}$; в) $(3, 0)$, $r=4$; г) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{3}{2}$. *Указание.* а) Приведя данное уравнение к виду $(x-2)^2+(y+1)^2=4$, заключаем, что координаты центра $(2, -1)$ и радиус равен 2. б) Предварительно разделить уравнение на 2, а затем поступить подобно тому, как это сделано в п. «а». **5.** $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$. **6.** $x^2+y^2-6x=0$. **7.** $x^2+y^2+8y=0$. **8.** $(x+5)^2+(y-3)^2=9$ и $(x+5)^2+(y+3)^2=9$. **9*.** $(x-4)^2+(y-7)^2=9$. *Указание.* Длина радиуса равна расстоянию центра окружности от данной прямой. **10*.** $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$. *Указание.* Возьмём искомое уравнение касательной в форме: $y-y_0=k(x-x_0)$. Для того чтобы определить угловой коэффициент k касательной, дифференцируем уравнение окружности: $2(x-a)\,dx+2(y-b)\,dy=0$, откуда $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$, следовательно: $k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=-\frac{x_0-a}{y_0-b}$. Подставляя найденное значение коэффициента k в уравнение касательной, приводя все члены уравнения к общему знаменателю и прибавляя к левой части сумму $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$, а к правой — равную этой сумме величину r^2 (точка (x_0, y_0) лежит на окружности, а потому координаты её удовлетворяют уравнению окружности), после элементарных преобразований получим уравнение касательной: $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$. **11.** $x_0x+y_0y=r^2$. **12.** $4x+3y-30=0$. **13*.** $x-3y-10=0$ и $3x-y+10=0$. *Указание.* Уравнение касательной возьмём в форме $x_0x+y_0y=10$, где (x_0, y_0) суть координаты точки касания. Значения этих координат найдём из двух условий: 1) координаты (x_0, y_0) должны удовлетворять уравнению окружности (точка касания лежит на окружности) и 2) точка $(-5, -5)$ лежит на касательной, а потому её координаты должны удовлетворять уравнению касательной. Таким образом, получаем систему двух уравнений относительно x_0, y_0: $x_0^2+y_0^2=10$, $5x_0+5y_0=-10$. Решив эту систему, найдём две пары значений: $x_0=1$, $y_0=-3$ и $x_0=-3$, $y_0=1$. Подставляя эти значения в уравнение касательной, получим касательные:

$x-3y-10=0$ и $3x-y+10=0$. **14.** $x+2y+5=0$ и $2x-11y+25=0$. **15*.** а) $2x+3y\pm 13=0$. *Указание.* Координаты точки касания найдутся из двух условий: 1) эта точка лежит на окружности и 2) угловые коэффициенты касательной и данной прямой равны; б) $3x+4y+20=0$ и $3x+4y-5=0$. **16*.** $d=6$. *Указание.* Длина (d) касательной есть катет прямоугольного треугольника, вершины которого лежат: 1) в центре окружности, 2) в данной точке M и 3) в точке касания. Поэтому величина d^2 определится как разность между квадратом гипотенузы (расстояние между центром окружности и данной точкой M) и квадратом радиуса окружности. Таким образом, будем иметь: $d^2=[(7-2)^2+(8-3)^2]-14$, откуда $d=6$. **17.** а) Окружность $(x-3)^2+y^2=9$. б) Окружность $(x-2a)^2+y^2=4a^2$. **18.** а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$; г) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; д) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; е) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; ж) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. **19.** а) Большая ось эллипса равна 10, а малая ось 8; $F_1(3, 0)$; $F_2(-3, 0)$; $\varepsilon=0{,}6$. б) Большая ось эллипса равна 12, а малая ось 4; $F_1(0, 4\sqrt{2})$; $F_2(0, -4\sqrt{2})$ (черт. 155), $\varepsilon=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **20.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; в) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; г) 0,8. **21.** $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$. **22.** $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, или $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{(^{25}/_4)^2}=1$ в зависимости от того, лежит ли на оси Oy малая или большая ось эллипса. **23.** $\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y+5)^2}{25}=1$. **24.** $\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y-5)^2}{^{320}/_{11}}=1$. **25.** Ни одной; две; одну. **26.** $x-3y+12=0$. **27.** $(5, -4)$. **28*.** $x+y-3=0$ и $x-5y-9=0$. *Указание.* Обозначим координаты точки касания через x_1, y_1. Тогда уравнение касательной будет иметь вид: $\frac{xx_1}{6}+\frac{yy_1}{3}=1$. Таким образом, задача сводится к нахождению координат точки касания. Так как касательная проходит через точку $(4, -1)$, то координаты x_1, y_1 должны удовлетворять уравнению $\frac{4x_1}{6}-\frac{y_1}{3}=1$. С другой стороны, координаты x_1, y_1 должны удовлетворять уравнению эллипса: $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$. Решая полученную систему уравнений относительно x_1, y_1, находим координаты точек касания $(2, 1)$ и $(^2/_3, -^5/_3)$. Подставляя найденные значения координат x_1, y_1 в уравнение касательной, получаем касательные $x+y-3=0$ и $x-5y-9=0$. **29.** $x+3=0$ и $x-6y+9=0$. **30*.** $3x-y\pm 7=0$. *Указание.* Координаты точки касания можно определить из условий: 1) они должны удовлетворять уравнению эллипса и 2) угловые коэффициенты искомых касательных должны быть равны угловому коэффициенту данной прямой. **31.** $x+y\pm 3=0$. **32.** $x=\pm 12$. **33.** $\frac{x^2}{60}+\frac{y^2}{24}=1$, или $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$. **34.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. **35.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **36.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$.

Черт. 155.

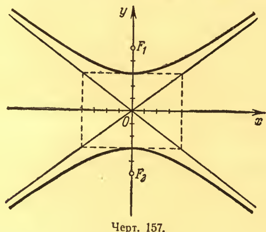
37. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **38*.** $5x+6y-11=0$. *Указание.* Если обозначим через k_1 угловой коэффициент искомой хорды, а через k_2 — угловой коэффициент диаметра, сопряжённого хордам, имеющим направление k_1, то, как известно, угловые коэффициенты k_1 и k_2 будут связаны соотношением $k_1=-\frac{5}{6k_2}$. Так как всякий диаметр проходит через начало координат, то уравнение диаметра, имеющего направление k_2, можно представить в виде $y=k_2x$. Вследствие того, что диаметр должен проходить через точку (1, 1) (он сопряжён хордам, имеющим направление k_1, и следовательно, должен проходить через середину искомой хорды), координаты (1, 1) должны удовлетворять уравнению $y=k_2x$, откуда получаем: $k_2=1$ и $k_1=-{}^5/_6$. Следовательно, уравнение искомой хорды будет: $y-1=-{}^5/_6(x-1)$, или $5x+6y-11=0$.

39. $5x-4y-14=0$. **40.** $\frac{48\sqrt{2}}{5}$. **41*.** Концы диаметра симметричны относительно начала координат, т. е. координаты концов одинаковы по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Поэтому, если координаты одного из концов диаметра обозначим через x_1, y_1, то координаты другого конца будут $-x_1$, $-y_1$. Следовательно, уравнения касательных, проведённых в концах диаметра, будут иметь вид $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ и $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=-1$, откуда видим, что угловые коэффициенты этих прямых равны. **42.** $y=\pm 3x$. **43.** 60°. **44.** $k_1={}^1/_2$; $k_2=-1$; $4\sqrt{\frac{5}{3}}$; $\frac{8}{\sqrt{3}}$. **45.** $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}$. **46*.** $y=\pm\frac{b}{a}x$. *Указание.* Пусть $y=k_1x$ и $y=k_2x$ будут уравнения искомых диаметров. Оба диаметра располагаются симметрично относительно координатных осей. Следовательно, $k_2=-k_1$. Поэтому $k_1k_2=-k_1^2=-\frac{b^2}{a^2}$, откуда $k_1=+\frac{b}{a}$ и $k_2=-\frac{b}{a}$. **47.** $y=\pm 3x$. **48.** $\frac{\pi}{3}$. **49*.** Эллипс. *Указание.* Стороны прямого угла принимаем за оси координат. Полагаем $AM=a$ и $BM=b$. Из черт. 156 мы имеем: $\frac{x}{a}=\sin\widehat{MAN}$, $\frac{y}{b}=\cos\widehat{MAN}$, откуда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, т. е. точка M описывает эллипс. Если точка M совпадает с серединой отрезка AB, то $a=b$, и мы имеем окружность: $x^2+y^2=a^2$. **50.** $r=\frac{4}{3-\sqrt{5}\cos\varphi}$. **51.** а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$; в) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$; г) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$; д) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$; е) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$. **52.** а) Действительная ось гиперболы равна 24, а мнимая ось 10; $F_1(13, 0)$; $F_2(-13, 0)$; $\varepsilon=\frac{13}{12}$. б) Действительная ось гиперболы равна 6, а мнимая ось 8; $F_1(0, 5)$; $F_2(0, -5)$ (черт. 157); $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

Черт. 156.

53. а) $\varepsilon\cos\frac{\alpha}{2}=1$; б) $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$. **54*.** $5y\pm 2x=0$. *Указание.* Коорди-

наты точек пересечения диаметра с гиперболой иайдутся из двух условий: 1) эти точки лежат на гиперболе и 2) расстояиия этих точек от цеитра гиперболы равиы $\sqrt{29}$. **55.** $r_1=6$; $r_2=14$. **56.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$. **57.** $x-y-2=0$; $x-y+2=0$. **58.** $x-y-1=0$; $9x+5y-23=0$. **59.** $3x-2y\pm 4=0$. **62*.** 1) b. 2) Обозначая через (x, y) коордииаты произвольной точки гиперболы и через d_1 и d_2 отклоиеиия этой точки от асимптот, будем иметь:



Черт. 157.

$d_1=\frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $d_2=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$, откуда $|d_1\cdot d_2|=\left|\frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2+b^2}\right|=\frac{a^2b^2}{c^2}$.

63. $a=\frac{p}{\varepsilon^2-1}$, $b=\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$. **64.** $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$. **65.** $2x-y\pm 1=0$. **66.** $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1$. **67.** $\varepsilon=\sqrt{3}$. **68.** $2x-y=0$ и $x-3y=0$, а также $2x+y=0$ и $x+3y=0$. **69.** $y=\pm\frac{4}{3}x$. **70.** $y=\pm\frac{5}{3}x$. **71.** а) $x^2-y^2=8$; б) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$; в) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$. **72.** Правая ветвь гиперболы $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. **73.** $x^2-y^2=a^2$, если координаты заданных точек $(a, 0)$ и $(-a, 0)$. **74.** $mx+x_0^2y=2mx_0$. **75.** а) $y^2=16x$; б) $y^2=8x$; в) $y^2=-8x$; г) $x^2=12y$; д) $x^2=8y$; е) $x^2=-8y$; ж) $y^2=6x-9$; з) $x^2=6y-9$. **76.** а) $(y-b)^2=2p(x-a)$; б) $(y-b)^2=-2p(x-a)$; в) $(x-a)^2=2p(y-b)$; г) $(x-a)^2=-2p(y-b)$. **77.** $y^2=-4x$. **78.** $(x+2)^2=-32(y-1)$. **79.** $2p$. **80*.** $3x-y-11=0$. *Указание*. Уравнение хорды иапишем в виде: $y-1=k(x-4)$. Уравиеиие диаметра, сопряжённого хордам, имеющим иаправление k, есть $y=\frac{3}{k}$. Так как этот диаметр должеи пройти через точку $(4, 1)$, то будем иметь: $1=\frac{3}{k}$, откуда определяем $k=3$. Таким образом, получаем искомое уравиеиие хорды: $y-1=3(x-4)$ или $3x-y-11=0$. **81.** $4x+y+3=0$. **82.** $y=\pm 4$. **83.** $2x-2y+5=0$ и $8x+4y+5=0$. **84.** $(9, 6\sqrt{3})$. **85.** $x+y+1=0$ и $x+3y+9=0$. **86.** а) $2x-y+2=0$; б) $x+y+4=0$. **87.** Парабола, фокус которой лежит в данной точке и директрисой которой служит даииая прямая.

К стр. 118—119 (гл. V, ч. 1)

1. а) $(-2, -6)$; б) $(-2, 4)$; в) $(6, -6)$; г) $(6, 4)$. **2.** $(12, -22)$; $(-12, 22)$. **3.** $(3, -3)$; $(-3, 3)$. **4.** $(-7, 5)$. **5.** а) $x = X$; $y = -Y$; б) $x = -X$; $y = -Y$. **6.** $x = Y$; $y = X$. **7.** $X = +2$, $Y = 0$. **8.** На угол в 135° или в 315°. Тогда координаты точки M будут соответственно: $X = -\sqrt{2}$, $Y = -\sqrt{2}$; $X = +\sqrt{2}$, $Y = +\sqrt{2}$. **9.** Уравнение не изменит своего вида. **10.** $XY = -\frac{a^2}{2}$. **11.** $X^2 - Y^2 = 2$. **12.** $Y = 4X^2$. Вершина O_1 (1, 1). Новые оси координат имеют направления старых осей. **13.** $Y = -3X^2$. Вершина $O_1\left(\frac{5}{6}, \frac{25}{12}\right)$. Новые оси координат имеют направления старых осей. **14.** $XY = -5$. Центр $(-4, 2)$. Новые оси координат имеют направления старых осей. **15.** а) $Y^2 = -\frac{3}{2}X$, новое начало $O_1\left(\frac{11}{6}, -\frac{3}{2}\right)$; б) $Y^2 = 4X$, новое начало $O_1(-4, 4)$. **16*.** а) $\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{1}{A}\left(y - \frac{4AC - B^2}{4A}\right)$; координаты вершины $\left(-\frac{B}{2A}, \frac{4AC - B^2}{4A}\right)$, ось симметрии параллельна оси Oy; б) $\left(y + \frac{N}{2M}\right)^2 = \frac{1}{M}\left(x - \frac{4MP - N^2}{4M}\right)$; координаты вершины $\left(\frac{4MP - N^2}{4M}, -\frac{N}{2M}\right)$, ось симметрии параллельна оси Ox. *Указание*. а) Уравнение такого вида было уже рассмотрено в тексте книги (гл. V, § 6). Однако сейчас мы укажем более короткий путь упрощения уравнения такой формы, удобный на практике. Перенесём свободный член C в левую часть равенства, разделим обе части равенства на A и дополним правую часть до полного квадрата: $\frac{y}{A} - \frac{C}{A} + \frac{B^2}{4A^2} = x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2}$; таким образом, получим уравнение в форме $\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{1}{A}\left(y - \frac{4AC - B^2}{4A}\right)$. Мы видим, что данная кривая есть действительно парабола, вершина которой лежит в точке $\left(-\frac{B}{2A}, \frac{4AC - B^2}{4A}\right)$ и ось симметрии параллельна оси Oy. б) Поступая аналогично, получим уравнение

$$\left(y + \frac{N}{2M}\right)^2 = \frac{1}{M}\left(x - \frac{4MP - N^2}{4M}\right).$$

17. а) $(x-1)^2 = \frac{1}{2}(y-6)$; б) $(x+3)^2 = -(y-2)$; в) $(y+4)^2 = 2(x+2)$; г) $(y+1)^2 = -\frac{1}{2}(x+4)$. **18.** $X = +\frac{14}{5}$, $Y = -\frac{2}{5}$, если в формулах (11) и (12) (стр. 115) перед радикалами взять знак минус. **19.** $(3, -2)$, если в формуле (11) (стр. 115) перед радикалом взять знак $+$, а в формуле (12) знак $-$. **20.** Второго.

К стр. 142—143 (гл. VI, ч. 1)

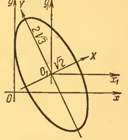
1. -4; 8; -48; ab; $-2(x^3 + y^3)$; $(x-y)(y-z)(z-x)$. **2.** а) $x = 1$; $y = 0$; $z = 1$; б) $x = a$; $y = 1$; $z = -1$; в) $x = 7k$, $y = -2k$; $z = -5k$, где k произвольно; г) $x = y = z = 0$; д) $x = {}^1/_5\,(9 - 7z)$ $y = {}^1/_5\,(1 + 2z)$, z произвольно; е) Система несовместна. **3.** 4 кв. ед. **4.** Да, лежат. **5.** $x + 4y - 11 = 0$.

6. $h_c = \pm\dfrac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$. **7.** $\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. **8.** Против часо-

вой стрелки. **9.** а) $\cos(\alpha+\beta)$; б) $\sin(\alpha+\beta)$; в) 0. **10.** $ACF+2BDE-AE^2-CD^2-FB^2$. **11.** а) $x_1=2$, $x_2=3$; б) $x_1=2$, $x_2=-\frac{11}{7}$; в) $x=2$.

К стр. 174—175 (гл. VII, ч. 1)

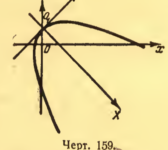
1. (1, 1). **2.** а) $(2, -1)$; б) $(^3/_{28}, -^{18}/_{28})$; в) $(-1, 2)$; г) $(1, -^3/_2)$; д) кривая центра не имеет; е) кривая имеет прямую центров. **4*.** $xy-x-4=0$. *Указание.* Если перенесём начало координат в центр искомой кривой, то уравнение её не будет иметь членов, содержащих первые степени текущих координат. Следовательно, уравнение её может быть написано в виде: $AX^2+2BXY+CY^2+F_1=0$, где X и Y суть текущие координаты относительно новой системы координат, а F_1 — свободный член, получающийся, как известно, подстановкой в первоначальное уравнение координат центра вместо текущих координат. Написанному уравнению должны удовлетворять координаты точек, через которые проходит кривая, но координаты этих точек должны быть уже выражены относительно новой системы координат. Пользуясь формулами переноса начала, находим координаты точек относительно новой системы: (2, 2) (4, 1), (—1, —4). Подставляя эти координаты вместо текущих координат, получаем систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C, F_1: $4A+8B+4C+F_1=0$, $16A+8B+C+F_1=0$, $A+8B+16C+F_1=0$. Деля каждое уравнение на F_1, находим: $\frac{A}{F_1}=0$, $\frac{B}{F_1}=-^1/_8$, $\frac{C}{F_1}=0$ и получаем, таким образом, уравнение $XY-4=0$. Переходя теперь к старой системе координат, находим искомое уравнение $xy-x-4=0$. **5.** $x^2-xy+2x-2=0$. **6** а) $4x^2-4y^2-3=0$; б) $2x^2-3y^2-2=0$; в) $4x^2-16y^2-11=0$. **7.** а) $3x^2+y^2=2$; б) $6x^2+y^2=12$; в) $6x^2-4y^2=7$. **8*.** а) $6x^2+y^2=12$; б) $y^2=\frac{5}{2\sqrt{2}}x$; в) $(x-^1/_2)^2+(y-^3/_2)^2=9$. *Указание.* а) Так как в данном случае $AC-B^2=5\cdot2-4=6\neq0$, то данная кривая имеет определённый центр. Для нахождения координат центра дифференцируем сперва уравнение кривой по x, затем по y и приравниваем нулю получающиеся при этом выражения: $10x+4y-24=0$, $4x+4y-12=0$. Решая эту систему уравнений, находим координаты центра: $x=2$, $y=1$. Подставив найденные значения в уравнение кривой вместо текущих координат, определяем свободный член простейшего уравнения $U_0=-12$. Для нахождения коэффициентов при текущих координатах простейшего уравнения составляем уравнение вида: $k^2-(A+C)k+(AC-B^2)=0$, корни которого k_1 и k_2 и будут коэффициентами уравнения $k_1X^2+k_2Y^2+U_0=0$. В данном случае будем иметь: $k^2-7k+6=0$, откуда $k_1=6$, $k_2=1$. Следовательно, простейшее уравнение будет $6X^2+Y^2-12=0$, или $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{12}=1$, т. е. данная кривая есть



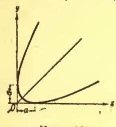
Черт. 158.

эллипс. Для построения исследуемой кривой находим уравнения главных диаметров. Воспользовавшись соответствующими формулами, получим: $x-2y=0$ (уравнение оси O_1X), $2x+y-5=0$ (уравнение оси O_1Y). Построив по найденным уравнениям главные оси кривой и зная уравнение кривой относительно этих осей, строим эллипс (черт. 158). б) В этом случае $AC-B^2=1-1=0$; следовательно, кривая будет параболой. Переписывая уравнение кривой в форме $(x+y)^2-4x+y-1=0$ (1), видим, что $\alpha=$

$\beta=1$, $D=-2$, $E=1/_2$. Составляем уравнение главного диаметра, которое, как известно, имеет вид $\alpha x+\beta y+\frac{\alpha D+\beta E}{\alpha^2+\beta^2}=0$. Подставляя найденные выше значения коэффициентов, получаем: $x+y-3/_4=0$. Решая совместно уравнения главного диаметра и кривой, находим координаты вершины параболы $(1/_{16}, 11/_{16})$. Теперь для приведения уравнения (1) к простейшему виду применяем формулы преобразования координат: $x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi+x_0$, $y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi+y_0$, где x_0, y_0 суть координаты вершины, а $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ определяются при помощи формул $\sin\varphi=\mp\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\cos\varphi=\pm\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Беря в этих формулах верхние знаки, получаем: $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi=+\frac{1}{\sqrt{2}}$ и формулы преобразования координат принимают вид: $x=\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{16}$, $y=-\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{2}}+\frac{11}{16}$. Подставляя эти значения x и y в уравнение (1), приходим к уравнению $Y^2=\frac{5}{2\sqrt{2}}X$. Для построения параболы строим прежде главный диаметр по его уравнению и вершину параболы $(1/_{16}, 11/_{16})$ (черт. 159). Положительное направление на новой оси абсцисс определяется знаками $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$; так как в исследуемом случае мы взяли для $\sin\varphi$ знак $-$, а для $\cos\varphi$ знак $+$, то значит, угол φ лежит в четвёртой четверти (в нашем примере он равен 315°). Зная теперь уравнение параболы относительно системы XO_1Y, легко построим её. Замечание. Если бы мы взяли нижние знаки в формулах, определяющих $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, то пришли бы к уравнению $Y^2=-\frac{5}{2\sqrt{2}}X$. Однако это отнюдь не значит, что мы имели бы другую параболу: в этом случае угол φ лежал бы во второй четверти, т. е. положительное направление на оси O_1X было бы противоположно тому, какое указано на черт. 159.



Черт. 159.


Черт. 160.

9. а) $x^2-y^2=1$; б) $2x^2-4y^2=9$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; г) $y^2=\frac{\sqrt{2}}{2}x$; д) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$; е) $y^2=4\sqrt{2}\,x$; ж) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; з) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; и) $y^2=\frac{3}{2\sqrt{2}}x$; к) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$; л) $y^2=\frac{6}{\sqrt{5}}x$; м) $y^2=\frac{1}{5\sqrt{5}}x$; н) $13x^2+52y^2=3$; о) $(5+\sqrt{10})x^2+(5-\sqrt{10})y^2=20/_3$; п) $(\sqrt{29}-2)x^2-(2+\sqrt{29})y^2-2=0$; р) $13y^2-\frac{108}{\sqrt{13}}x=0$.

10*. Парабола. Осью симметрии служит биссектриса координатного угла. Парабола касается осей координат в точках $(a, 0)$, $(0, a)$. *Указание.* Возводя данное уравнение во вторую степень, получаем: $x + 2x^{1/2}y^{1/2} + y = a$. Уединяя член $2x^{1/2}y^{1/2}$, возводя опять обе части уравнения в квадрат и перенося все члены в левую часть уравнения, приходим к уравнению $x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$ (1), откуда легко видеть, что кривая есть парабола. Уравнение главного диаметра: $y = x$. Полагая в уравнении (1) $y = 0$, получаем: $(x - a)^2 = 0$, откуда следует, что парабола касается оси Ox в точке $(a, 0)$. Аналогичным образом убеждаемся, что парабола касается оси Oy в точке $(0, a)$ (черт. 160).

К стр. 186—187 (гл. I, ч. 2)

2. Точка лежит: а) на оси Ox; б) на оси Oy; в) на плоскости yOz; г) на плоскости xOz. **3.** а) Относ. плоскости xOy: $(2, -3, 1)$; $(a, b, -c)$; относ. плоскости yOz: $(-2, -3, -1)$; $(-a, b, c)$; относ. плоскости xOz: $(2, 3, -1)$; $(a, -b, c)$; б) относ. оси Ox: $(2, 3, 1)$; $(a, -b, -c)$; относ. оси Oy: $(-2, -3, 1)$; $(-a, b, -c)$; относ. оси Oz: $(-2, 3, -1)$; $(-a, -b, c)$; в) относ. начала координат: $(-2, 3, 1)$; $(-a, -b, -c)$. **4.** $S\left(0, 0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $P_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$, $P_2\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$, $P_3\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right)$, $P_4\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right)$.
5. $OA = \sqrt{50}$; $d_x = \sqrt{34}$; $d_y = \sqrt{41}$; $d_z = 5$. **6.** $d = 3$. **8*.** $r = {}^7/_3$. *Указание.* Определяем сперва координаты центра сферы как точки, равноудалённой от данных точек. **9.** $(1, {}^5/_3, {}^1/_3)$. **10.** $\sqrt{149}$, $2\sqrt{14}$; 13; $(6, 3, {}^{20}/_3)$. **11.** $B\,(10, 0, {}^{18}/_5)$. **12.** Относительно одной системы $(-3, -1, 3)$; относительно другой системы $(3, 1, -3)$. **13.** Не существует. **14.** $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **15.** $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **16.** $\cos\alpha = \pm {}^2/_3$, $\cos\beta = \mp {}^2/_3$, $\cos\gamma = \mp {}^1/_3$.
17. $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm {}^1/_3\sqrt{3}$. **18.** $R = 11$, $\cos\alpha = -{}^6/_{11}$, $\cos\beta = -{}^2/_{11}$, $\cos\gamma = {}^9/_{11}$. **19.** $\gamma = 60°$, $A\,(3, 3\sqrt{2}, 3)$. **20.** $r = 10\sqrt{3}$; $z = -\sqrt{11}$, $\cos\beta = {}^4/_{15}\sqrt{3}$, $\cos\gamma = -{}^1/_{30}\sqrt{33}$. **21.** $\cos\varphi_1 = {}^3/_7\sqrt{5}$, $\cos\varphi_2 = {}^1/_7\sqrt{13}$, $\cos\varphi_3 = {}^2/_7\sqrt{10}$. **22*.** $d = 13$, $\cos\alpha = \pm {}^3/_{13}$, $\cos\beta = \mp {}^4/_{13}$, $\cos\gamma = \pm {}^{12}/_{13}$. *Указание.* Для определения направляющих косинусов прямой, проходящей через эти точки, переносим начало координат в точку A, сохраняя неизменными направления осей. Определяем координаты точки B относительно новой системы: $X = 5 - 2 = 3$, $Y = 1 - 5 = -4$, $Z = 11 + 1 = 12$. Теперь легко видеть, что $\cos\alpha = \pm {}^3/_{13}$, $\cos\beta = \mp {}^4/_{13}$, $\cos\gamma = \pm {}^{12}/_{13}$. **23.** $d = 5$, $\cos\alpha = \pm {}^4/_5$, $\cos\beta = \mp {}^3/_5$, $\cos\gamma = 0$. **24.** 60°. **25.** 90°.

К стр. 216—217 (гл. II, ч. 2)

1. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0$, или $x = x_1 + a$, $y = y_1 + b$, $z = z_1 + c$. **2*.** $x = x_1\cos(x, x_1) + y_1\cos(x, y_1) + z_1\cos(x, z_1)$, $y = x_1\cos(y, x_1) + y_1\cos(y, y_1) + z_1\cos(y, z_1)$, $z = x_1\cos(z, x_1) + y_1\cos(z, y_1) + z_1\cos(z, z_1)$. *Указание.* $\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = \mathbf{i}_1x_1 + \mathbf{j}_1y_1 + \mathbf{k}_1z_1$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — три основных единичных вектора старой системы, а $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ — единичные векторы новой системы. **3.** $x = x_1\cos(x, x_1) + y_1\cos(x_1, y_1) + z_1\cos(x, z_1) + a$, $y = x_1\cos(y, x_1) + y_1\cos(y, y_1) + z_1\cos(y, z_1) + b$, $z = x_1\cos(z, x_1) + y_1\cos(z, y_1) + z_1\cos(z, z_1) + c$. **5.** $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}$; $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$; $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$, **6.** $\mathbf{r} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$;

$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$; $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$; $z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}$;
8. $A=\sqrt{3}, \alpha=\beta=\gamma=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **9.** 2. **10*.** *Указание.* Диагонали параллелограмма $\overrightarrow{OC}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ и $\overrightarrow{AB}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$. **13.** 135°. **14.** 60°. **15*.** *Указание.* Взять в плоскости xOy два единичных вектора **a** и **b**, составляющих с осью абсцисс соответственно углы α и $-\beta$, и составить **ab**. **16.** Нельзя. **17*.** *Указание.* Рассмотреть векторное произведение двух единичных векторов, лежащих в плоскости xOy и составляющих с осью x соответственно углы α и β. **18.** $3\sqrt{10}$. **19.** $^1/_2\sqrt{1562}$. **20.** $\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}$.

21. $\sin C=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$. **22.** 1. **26.** 22,5.
27. $^{45}/_{109}\sqrt{109}$. **28.** $-58\mathbf{i}-20\mathbf{j}+\mathbf{k}; -80$. **29*.** $\frac{|(\mathbf{A}-\mathbf{C})(\mathbf{B}\times\mathbf{D})|}{|\mathbf{B}\times\mathbf{D}|}={}^7/_6\sqrt{6}$. *Указание.* Искомое расстояние будет представлять высоту параллелепипеда, основание которого есть параллелограмм, определяемый векторами — сторонами **B** и **D**, а третье ребро изображается вектором $\mathbf{A}-\mathbf{C}$. **30*.** $\frac{|(\mathbf{B}-\mathbf{A})\times\mathbf{C}|}{C}=\frac{20\sqrt{2}}{11}$. *Указание.* Искомое расстояние будет представлять высоту параллелограмма, основание которого есть вектор **C**, а другая сторона изображается вектором $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

К стр. 223 (гл. III, ч. 2)

1. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z-2=0$. **2.** $(1, -2, 2)$, $R=4$. **3.** $(1, 0, 0)$. $R=1$. **4.** $\left(0, \frac{5}{4}, 0\right)$, $R=\frac{1}{4}\sqrt{89}$. **5.** $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$. **6.** $x^2+y^2+z^2-2x=0$. **7.** $x^2+y^2-x+1=0$. **8.** Эллипс. **9.** Цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей $x^2+y^2-2x=0$, $z=0$.

К стр. 242—244 (гл. IV, ч. 2)

1. а) Нет; б) проходит; в) нет; г) проходит; д) нет. **2.** а) $\cos\alpha={}^2/_7$, $\cos\beta={}^3/_7$, $\cos\gamma={}^6/_7$, $p=5$; б) $\cos\alpha={}^{21}/_{79}$, $\cos\beta={}^{30}/_{79}$, $\cos\gamma=-{}^{70}/_{79}$, $p={}^{84}/_{79}$, в) $\cos\alpha=-{}^1/_3$, $\cos\beta={}^2/_3$, $\cos\gamma=-{}^2/_3$, $p=7$. **3.** $x=y=z=10$. **4.** $(\pm\sqrt{2}, 1, 1)$. **5.** $2x+9y-6z-121=0$. **6*.** *Указание.* Уравнение искомой плоскости будет: $A_1(x-8)+B_1(y+7)+C_1(z-5)=0$, причём вектор $\mathbf{n}\{A_1, B_1, C_1\}$ можно принять равным вектору $\overrightarrow{AB}$ $\{6, -6, 7\}$, т. е. $A_1=6$, $B_1=-6$, $C_1=7$. Подставляя последние числа в уравнение плоскости, получим: $6x-6y+7z-125=0$. **7.** $10x+2y+11z-148=0$. **8.** $2, -4, {}^1/_2$. **9.** $x+y+z-2=0$. **10.** а) Плоскость параллельна оси Oz; б) плоскость параллельна плоскости yOz; в) плоскость проходит через ось Ox. **11.** а) $3x+2z-5=0$; б) $y-3z=0$; в) $y-2=0$. **12.** а) $3x+5y+7z-100=0$; б) $15x+17y-42z+238=0$. **13.** а) 45°; б) 60°; в) $\cos\varphi={}^8/_{21}$. **14.** а) $3x-7y+5z=0$; б) $3x-7y+5z-66=0$; в) $3x-7y+5z-39=0$; г) $3x-7y+5z-9=0$. **15.** а) $5x+7y+3=0$; б) $y-z+7=0$; в) $5x+7z-46=0$. **16.** $3x+y+2z-23=0$. **17.** $2x+3y+z=0$. **18.** а) $(5, -7, 8)$; б) $(-10, 0, 2)$; в) $(3, -2, -5)$. **19.** $|d|=1$. **20.** $(0, -{}^{73}/_{282}, 0)$ и $(0, {}^{73}/_{12}, 0)$. **21.** $35y+12z=0$ и $3y-4z=0$, **22.** $20x-4y-5z+133=0$ и $20x-4y-$

$-5z-119=0$. **23.** а) 3; б) 5. **24*.** $45x+184y+482z-553=0$ и $96x-13y-4z-1106=0$. *Указание.* Искомые плоскости являются геометрическими местами точек, равноудалённых от двух данных плоскостей. Для точек одной из искомых плоскостей отклонения от данных плоскостей одинаковы по абсолютной величине и по знаку, а для точек другой — отклонения равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки. Поэтому уравнение одной плоскости будет: $\frac{3x+2y+6z-35}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{21x-30y-70z-237}{\sqrt{441+900+4900}}$, а другой $\frac{3x+2y+6z-35}{\sqrt{9+4+36}}=-\frac{21x-30y-70z-237}{\sqrt{441+900+4900}}$. После элементарных преобразований получим уравнения, данные в ответе. **25.** $4x-50y-22z+675=0$ и $46x-50y+122z+375=0$. **26.** $(a_1-a)(x-a)+(b_1-b)(y-b)+(c_1-c)(z-c)=0$. **27.** $\begin{vmatrix} x & z & 1 \\ x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}=0$. **28.** $z_1y-y_1z=0$. **29.** $y-y_1=0$. **30.** $Ax+By-(A+B)z=0$, где A и B произвольны (но не равны одновременно нулю). **31.** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$. **32.** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0$. **33.** $x=7k$, $y=-2k$, $z=-5k$, где k произвольно. **34.** $x=\frac{9-7z}{x}$, $y=\frac{1+2z}{5}$, а z произвольно. **35.** Нет точки пересечения. **36.** $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{ab}=0$; $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0$. **37.** $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}=0$;

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0.$$

К стр. 261—265 (гл. V, ч. 2)

1. а) Прямая проходит через начало координат; б) прямая параллельна оси Oz; в) прямая параллельна плоскости xOz; г) прямая параллельна оси Ox; д) прямая совпадает с осью Oy; е) прямая перпендикулярна к оси Ox и пересекает её; ж) прямая лежит в плоскости yOz. **2*.** $D=3$. *Указание.* Координаты точки, в которой прямая пересекает ось Oz, будут $(0, 0, z_1)$, где z_1 — неизвестная координата. Эти координаты должны удовлетворять обоим данным уравнениям, так как обе плоскости должны пересекать ось Oz в одной и той же точке. Подставив значения $(0, 0, z_1)$ вместо текущих координат в данные уравнения, получим два уравнения относительно z_1 и D: $2z_1-6=0$, $-z_1+D=0$, откуда найдём: $D=3$. **3*.** $B=-6$; $D=-27$. *Указание.* Так как прямая должна лежать в плоскости xOy, то она пересекает оси Ox и Oy. Координаты точек, в которых прямая пересекает эти оси, соответственно будут: $(x_1, 0, 0)$, $(0, y_1, 0)$. Подставляя эти значения в данные уравнения, получаем четыре уравнения относительно неизвестных x_1, y_1, B и D: $x_1-9=0$, $3x_1+D=0$, $-2y_1-9=0$, $By_1+D=0$, откуда находим: $B=-6$, $D=-27$. **4*.** а) $D=0$, $D_1=0$; б) $A=0$, $A_1=0$; в) $\frac{B}{B_1}=\frac{D}{D_1}$; г) $C=D=0$, $C_1=D_1=0$. *Указание.* в) Для того чтобы прямая пересекла ось Oy, нужно, чтобы обе плоскости пересекали ось Oy в одной и той же точке, т. е. чтобы координаты $(0, y_1, 0)$, где y_1 — неизвестная координата) удовлетворяли обоим уравнениям. Подставляя эти значения в уравнения прямой, получаем: $By_1+D=0$, $B_1y_1+D_1=0$, откуда

$y_1 = -\frac{D}{B}$, $y_1 = -\frac{D_1}{B_1}$, и следовательно: $\frac{B}{B_1} = \frac{D}{D_1}$. **5.** Точка A лежит, а точка B не лежит на данной прямой. **7*.** $4x + 5y - 32 = 0$, $11x + 10z - 78 = 0$, $11y - 8z - 8 = 0$. *Указание.* Плоскость, проектирующая прямую на координатную плоскость xOy, должна удовлетворять двум условиям: 1) она должна проходить через данную прямую и 2) она должна быть перпендикулярна к плоскости xOy, или, что то же, параллельна оси Oz. Исключим из двух данных уравнений координату z, для чего умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым. Таким образом, получим уравнение $4x + 5y - 32 = 0$. Полученное уравнение является уравнением проектирующей плоскости, так как: 1) оно является следствием двух данных уравнений, а потому значения координат (x, y, z), удовлетворяющие двум данным уравнениям, удовлетворяют и полученному уравнению, что свидетельствует о том, что эта плоскость проходит через данную прямую, и 2) полученная плоскость параллельна оси Oz (в уравнении отсутствует координата z). Уравнения плоскостей, проектирующих прямую на другие координатные плоскости, найдутся аналогичным образом. **8.** $\begin{cases} 9x - 4y + 13 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 15x - 8z + 3 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y - 6z - 14 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ **9*.** $x + y + z = 0$, $y - z - 1 = 0$. *Указание.* Уравнение всякой плоскости, проходящей через данную прямую, можно написать в виде $x + y - z - 1 + \lambda(x - y + z + 1) = 0$, или $(1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (-1 + \lambda)z - (1 - \lambda) = 0$. Из этих плоскостей нам нужно выбрать ту, которая проектирует нашу прямую на плоскость $x + y + z = 0$. Так как проектирующая плоскость должна быть перпендикулярна к плоскости проекции, то λ должно удовлетворять условию $(1 + \lambda) \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 + (-1 + \lambda) \cdot 1 = 0$, откуда находим значение $\lambda = -1$. Следовательно, уравнение проектирующей плоскости будет: $y - z - 1 = 0$. Так как проекция прямой должна лежать на плоскости, на которую прямая проектируется, т. е. на плоскости $x + y + z = 0$, то, присоединяя это уравнение к найденному уравнению проектирующей плоскости, получим уравнения проекции: $x + y + z = 0$, $y - z - 1 = 0$. **10.** $2x + 2y + z - 15 = 0$, $4x - 9y + 10z - 9 = 0$. **11.** а) $\cos\alpha = {}^4/_{13}$, $\cos\beta = -{}^{12}/_{13}$, $\cos\gamma = {}^3/_{13}$; б) $\cos\alpha = {}^2/_3$, $\cos\beta = -{}^1/_3$, $\cos\gamma = -{}^2/_3$. **12.** а) $\frac{x+5}{3} = \frac{y+8}{2} = \frac{z}{1}$; б) $\frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{6} = \frac{z}{1}$; в) $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-12}{3}$.

13. $\cos(L_1, L_2) = {}^{20}/_{21}$, $\cos(L_2, L_3) = {}^{106}/_{119}$, $\cos(L_3, L_1) = {}^{38}/_{51}$. **14.** $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{30}}$, $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{30}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{30}}$. **15.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

16. $\cos\varphi = {}^4/_{21}$. **17.** а) $x - 2 = 0$, $y + 3 = 0$; б) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+8}{5}$.

18. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{3}$. **19.** $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. **20.** а) лежат; б) лежат; в) не лежат. **21.** $y = 22x + 71$, $z = 2x - 3$. **22.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

23. $x = 3z - 1$, $y = -5z - {}^{17}/_4$. **24.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{\pm\sqrt{6}} = \frac{z+1}{\pm\sqrt{6}}$.

25. $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ a_1-a & b_1-b & c_1-c \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ a_2-a & b_2-b & c_2-c \end{vmatrix} = 0$.

26. $\frac{x-a}{ap_1} = \frac{y-b}{bp_1} = \frac{z-c}{-(am_1 + bn_1)}$.

27. $\begin{vmatrix} y-nz-b & -(x-mz-a) & (x-a)n-(y-b)m \\ m & n & 1 \\ m_1 & n_1 & 1 \end{vmatrix}=0,$

$\begin{vmatrix} y-n_1z-b_1 & -(x-m_1z-a_1) & (x-a_1)n_1-(y-b_1)m_1 \\ m & n & 1 \\ m_1 & n_1 & 1 \end{vmatrix}=0.$

28. (1, 1, 1). **29.** (5, —1, 2). **30.** $\sin\varphi = {}^3/_{133}$. **31.** а) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-3}{-8}$; б) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{11}=\frac{z-3}{0}$; в) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}$.

32. $4x-y+3z-11=0$. **33.** ${}^1/_2\sqrt{6}$. **34*.** ${}^2/_{13}\sqrt{26}$. *Указание.* Следует провести прямую III через точку, лежащую на прямой II, параллельно прямой I, затем составить уравнение плоскости, проходящей через прямые II и III, наконец, найти расстояние от точки прямой I до этой плоскости. **35.** $p=-5$. **36.** $2x+3y+z+5=0$. **37.** $x-3y-z-10=0$. **38.** $x-3y+2z-4=0$. **39.** $x-2y-2z+2=0$. **40.** $2x+y-1=0$. **41.** $\frac{x+1}{48}=\frac{y}{37}=\frac{z-4}{4}$. **42.** $x+y+z=0$.

43. $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$ **44.** $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a_1-a & b_1-b & c_1-c \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0.$

45. $(A_1m+B_1n+C_1p)(Ax+By+Cz+D)-$
$-(Am+Bn+Cp)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0.$

46. $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0.$ **47.** $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0.$

48. $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$, где положено $m=\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ 0 & -C & B \end{vmatrix}$;

$n=\begin{vmatrix} b-b_1 & c-c_1 & a-a_1 \\ n_1 & p_1 & m_1 \\ 0 & -A & C \end{vmatrix}$; $p=\begin{vmatrix} c-c_1 & a-a_1 & b-b_1 \\ p_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & -B & A \end{vmatrix}$.

49. $m(x-a)+n(y-b)+p(z-c)=0.$

К стр. 280 (гл. VI, ч. 2)

1. $x^2=y^2+z^2$. **2.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$. **3.** $Ah^2x^2+2Bh^2xy+Ch^2y^2+$ $+2Dhxz+2Ehyz+Fz^2=0$. **4.** Конус, образованный вращением прямой линии $y=x$ вокруг оси Ox. **5.** Конус с вершиной в начале координат и направляющей $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, $z=1$. **6.** Эллипсоид, полученный от вращения вокруг оси Oz эллипса $x^2+\frac{z^2}{{}^1/_4}=1$, $y=0$. **7.** Однополостный гиперболоид, полученный от вращения вокруг оси Oz гиперболы $x^2-z^2=1$, $y=0$. **8.** Двуполостный гиперболоид, полученный от вращения вокруг оси Ox гиперболы $x^2-y^2=4$, $z=0$. **9.** Параболоид, полученный вращением вокруг оси Oz параболы $z=x^2$, $y=0$. **10.** x^2+y^2+ $+z^2-xy-yz-zx-\frac{2}{3}=0$.

Привалов Иван Иванович

Аналитическая геометрия

Редактор *Н. А. Угарова*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно*
Корректор *З. В. Моисеева*

Печать с матриц. Подписано к печати 6/I 1960 г. Бумага $60 \times 92^1/_{16}$. Физ. печ. л. 18,75. Условн. печ. л. 18,75. Уч.-изд. л. 19,73. Тираж 100 000 экз. Цена книги 6 р. 90 к. Заказ № 595.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного хозяйства.
Управление полиграфической промышленности.
Типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького.
Ленинград, Гатчинская, 26.

6 р. 90 к.